Introduction au calcul stochastique et aux mathématiques financières

Olivier Lévêque, olivier.leveque#epfl.ch

ISM Adonaï, Cotonou, Bénin - semaine du 7 au 11 janvier 2013

L'objectif de ce cours est d'introduire les étudiants aux notions de base du calcul stochastique et des mathématiques financières, en particulier l'évaluation et la couverture d'options.

Avertissement: Plusieurs notions sont exposées dans ce cours sans une complète rigueur mathématique, le but étant de donner aux étudiants un bref aperçu du sujet en une semaine, sans entrer dans trop de détails. Pour un exposé plus complet, on se référera à la vaste littérature disponible sur le sujet.

1 Introduction au calcul stochastique

1.1 Variables aléatoires

Une variable aléatoire X est caractérisée par sa *loi* (ou *distribution*), elle-même donnée par la liste de nombres $\mathbb{P}(X \in B)$ avec $B \subset \mathbb{R}$. On distingue deux types principaux de variables aléatoires:

- Les variables aléatoires *discrètes*, qui prennent un nombre fini ou dénombrable de valeurs $x_1, x_2, \ldots$:

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i, \quad \text{avec} \quad p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1.$$

Exemple: variable de Bernoulli $X \sim \mathcal{B}(p)$: $\mathbb{P}(X = 1) = p$, $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ $(0 \leq p \leq 1)$.

- Les variables aléatoires *continues*, qui admettent une fonction de densité $p_X(x)$:

$$\mathbb{P}(X \in B) = \int_B p_X(x)\, dx, \quad \text{avec} \quad p_X(x) \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} p_X(x)\, dx = 1.$$

Exemple: variable gaussienne $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$: $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$ $(\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0)$.

Espérance et variance

- Pour une variable discrète, l'espérance et la variance sont définies de la manière suivante:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i\, p_i, \quad \mathbb{E}(X^2) = \sum_i x_i^2\, p_i \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Exemple: si $X \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\mathbb{E}(X) = p$ et $\mathrm{Var}(X) = p - p^2 = p\,(1-p)$.

- Pour une variable continue, l'espérance et la variance sont définies de la manière suivante:

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} x\, p_X(x)\, dx, \quad \mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}} x^2\, p_X(x)\, dx \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2.$$

Exemple: si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\mathbb{E}(X) = \mu$ et $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ (voir exercice 1).

Notez qu'en géneéral, une définition équivalente de la variance de X est la suivante:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2),$$

où l'on voit que la variance représente la valeur moyenne du carré de la déviation de la variable aléatoire X par rapport à sa valeur moyenne $\mathbb{E}(X)$.

Si X et Y sont deux variables aléatoires, on a toujours $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$. C'est la propriété de *linéarité* de l'espérance. Cette propriété n'est pas vraie en général pour la variance.

Variables aléatoires indépendantes

Deux variables aléatoires X et Y sont dites *indépendantes* si

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A)\, \mathbb{P}(Y \in B) \quad \text{pour tous } A, B \subset \mathbb{R}.$$

Ceci se traduit de la manière suivante:

- pour des variables discrètes: $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\, \mathbb{P}(Y = y_j)$ pour tous i, j.

- pour des variables continues: $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x)\, p_Y(y)$ (où on rappelle que $p_{X,Y}(x, y)$ est la fonction de densité conjointe de X et Y).

Si X et Y sont indépendantes, alors

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y) \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y).$$

Variables aléatoires identiquement distribuées

Deux variables aléatoires sont dites *identiquement distribuées* si elles ont la même loi, i.e. si $\mathbb{P}(X \in B) = \mathbb{P}(Y \in B)$ pour tout $B \subset \mathbb{R}$.

1.2 Processus aléatoires

Processus à temps discret: la marche aléatoire

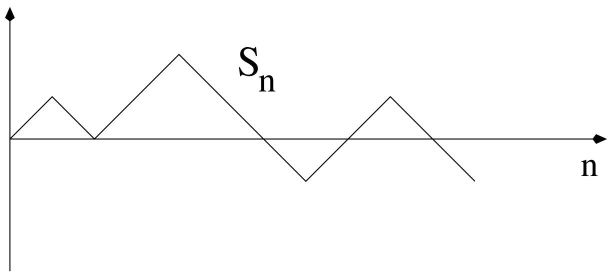
Soit $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). La *marche aléatoire* est le processus $(S_n,\, n \geq 0)$ défini par

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Suivant la distribution des variables aléatoires X_n, le processus S_n peut avoir des comportements différents. Considérons le cas particulier de la marche aléatoire *simple*, pour laquelle on a pour tout $n \geq 1$:

$$\mathbb{P}(X_n = +1) = p, \quad \mathbb{P}(X_n = -1) = 1 - p, \quad \text{avec} \quad 0 < p < 1.$$

Voici à quoi ressemble une trajectoire du processus S_n dans ce cas:



Dans le cas où $p = 1/2$, on dit que la marche aléatoire simple est *symétrique*.

Pour un p quelconque (mais toujours compris entre 0 et 1), calculons (le calcul est le même pour tout X_n):

$$\mathbb{E}(X_n) = (+1)\,p\, + (-1)\,(1-p) = 2p - 1$$

et

$$\mathrm{Var}(X_n) = \mathbb{E}(X_n^2) - \mathbb{E}(X_n)^2 = \big((+1)^2\,p\, + (-1)^2\,(1-p)\big) - (2p-1)^2 = 1-(2p-1)^2 = 4p\,(1-p).$$

De là, on déduit d'abord, par la linéarité de l'espérance et le fait que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont identiquement distribuées, que

$$\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(X_1) + \ldots + \mathbb{E}(X_n) = n\,\mathbb{E}(X_1) = n\,(2p-1),$$

et également, du fait que les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont *indépendantes* et identiquement distribuées:

$$\mathrm{Var}(S_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \ldots + \mathrm{Var}(X_n) = n\,\mathrm{Var}(X_1) = 4np\,(1-p).$$

Pour le cas particulier $p = 1/2$, ceci donne:

$$\mathbb{E}(S_n) = 0 \quad \text{et} \quad \mathrm{Var}(S_n) = n.$$

Donc dans cas, le processus S_n est nul *en moyenne*, mais sa *variance* est égale à n, ce qui veut dire qu'avec le temps qui passe, le processus dévie de plus en plus loin de sa valeur moyenne. L'ordre de grandeur de cette déviation moyenne au temps n est égal à $\sqrt{n}$ (la variance étant égale au carré de cette déviation moyenne).

Le *théorème central limite* nous dit de plus que lorsque n devient grand, la distribution de S_n se rapproche de celle d'une variable *gaussienne* de moyenne nulle et de variance n (cet énoncé est toutefois à prendre avec des pincettes). Dans le cas d'un p quelconque compris entre 0 et 1, on a de même que la distribution de S_n se rapproche de celle d'une variable gaussienne de moyenne $n\,(2p-1)$ et de variance $4np\,(1-p)$.

A noter la différence importante entre les cas $p = 1/2$ et $p \neq 1/2$: dans le premier cas, le processus S_n reste nul en moyenne et oscille autour de 0; dans le second cas, le processus S_n part dans une direction bien définie (vers le haut si $p > 1/2$; vers le bas si $p < 1/2$) en suivant une droite de pente $2p-1$ en moyenne, et oscille autour de cette droite. Les oscillations sont toutefois d'ordre $\sqrt{n}$, donc bien inférieures (pour n grand) à la distance moyenne $(2p-1)\,n$ parcourue depuis le point de départ. Dans ce cas, le processus S_n s'éloigne donc lentement mais sûrement de la valeur 0.

Processus à temps continu: le mouvement brownien

Le *mouvement brownien* est un processus $(B_t,\ t \in \mathbb{R}_+)$ satisfaisant les conditions suivantes:

* $B_0 = 0$

* Ses accroissements sont *indépendants*, i.e. si $n \geq 2$ et $t_n > t_{n-1} > \ldots > t_1 > t_0 \geq 0$, alors

$$B_{t_n} - B_{t_{n-1}}, \quad B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}} \quad \ldots \quad B_{t_1} - B_{t_0}$$

sont des variables aléatoires indépendantes. En particulier, si $t > s \geq 0$, alors

$$B_t - B_s \quad \text{et} \quad B_s - B_0 = B_s \quad \text{sont indépendantes.}$$

* Ses accroissements sont *stationnaires*, i.e. si $t > s \geq 0$, alors

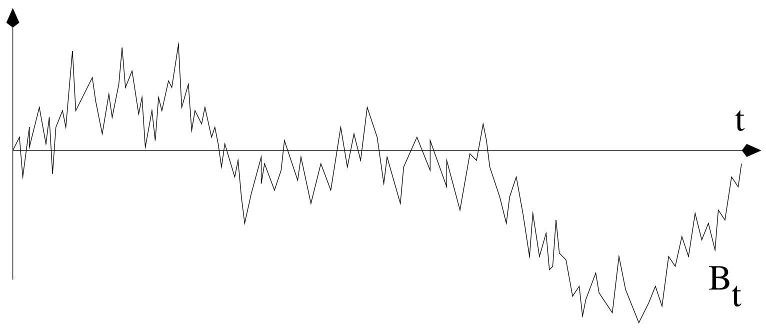
$$B_t - B_s \quad \text{et} \quad B_{t-s} \quad \text{sont identiquement distribuées.}$$

* Ses accroissements sont *gaussiens*, i.e. si $t > s \geq 0$, alors

$$B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s).$$

* Ses trajectoires $t \mapsto B_t$ sont continues.

Voici à quoi ressemble une trajectoire du mouvement brownien:



Propriétés de base du mouvement brownien

* Si $t > s \geq 0$, alors $\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$ et $\mathrm{Var}(B_t - B_s) = t - s$.

* En particulier, si $s = 0$, alors $\mathbb{E}(B_t) = 0$ et $\mathrm{Var}(B_t) = t$ (voir exercice 2 pour le calcul de moyenne et de variance d'autres processus reliés au mouvement brownien).

* Aussi, pour h petit, $\mathrm{Var}(B_{t+h} - B_t) = h$, ce qui implique que $|B_{t+h} - B_t| \simeq \sqrt{h}$ et donc

$$\frac{dB_t}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{B_{t+h} - B_t}{h} \quad \text{n'existe pas.}$$

Les trajectoires du processus B sont donc continues mais pas dérivables: c'est une caractéristique commune à toute une classe de processus appelés *martingales*, que nous allons voir plus loin.

Le mouvement brownien vu comme la limite d'une suite de marches aléatoires

Soit $(S_n,\, n \in \mathbb{N})$ la marche aléatoire simple symétrique vue plus haut: $S_0 = 0$ et $S_n = X_1 + \ldots + X_n$, avec X_n i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_n = +1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$ pour toute valeur de n. S_n est un processus à temps discret, mais on peut définir à partir de S_n le processus à temps continu $(Y_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ suivant:

$$Y_t = S_n + (t - n)\, X_{n+1}, \quad \text{pour } n \leq t \leq n + 1.$$

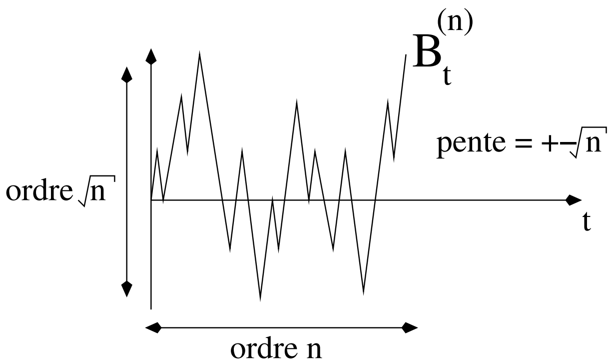
Le processus Y n'est rien d'autre que la ligne brisée dessinée sur la figure suivant la définition de la marche aléatoire. Sa pente (autrement dit sa dérivée) est égale à ± 1, selon que le processus monte ou decsend durant cette période.

Remarquez que le processus Y lui-même n'est pas un mouvement brownien: en particulier, ses accroissements ne sont ni gaussiens (c'est clair), ni indépendants (car si on connaît l'accroissement du processus entre les temps n et $n + 1/2$, alors on connaît la valeur de X_{n+1}, donc on sait de façon déterministe où va le processus du temps $n + 1/2$ au temps $n + 1$).

Cependant, définissons la suite de processus suivante:

$$B_t^{(n)} = \frac{Y_{nt}}{\sqrt{n}}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Pour un n donné, le processus $B^{(n)}$ est représenté sur la figure ci-dessous:

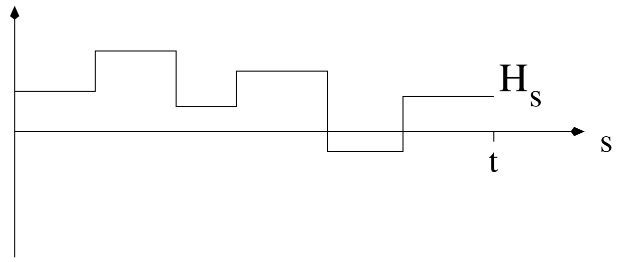


Le processus $B^{(n)}$ est en fait une marche aléatoire dont on a changé les dimensions temporelle et spatiale: dans un laps de temps égal à $1/n$, le processus fait un saut vers le haut ou vers le bas de taille $1/\sqrt{n}$. Sa pente à un instant donné est donc égale à $\pm\sqrt{n}$, selon que le processus monte ou descend durant cette période. On peut montrer que lorsque n tend vers l'infini, alors la suite de processus $B^{(n)}$ converge vers un mouvement brownien B. Ainsi, un mouvement brownien est un processus dont la pente à tout instant est égale à $\pm\infty$! (autrement, cette "pente" n'existe pas, ce qui confirme le fait que le processus n'est pas dérivable).

1.3 Intégrale stochastique et processus d'Itô

Intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien

Soit B un mouvement brownien et $H = (H_s,\, s \in [0,t])$ un processus constant par morceaux sur l'intervalle $[0,t]$:



Soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$ une subdivision de l'intervalle $[0,t]$; supposons que le processus H reste constant sur les intervalles $[t_{i-1}, t_i[$. On définit alors *l'intégrale stochastique de H par rapport à B* comme

$$\int_0^t H_s \, dB_s = \sum_{i=1}^n H_{t_{i-1}} \, (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$$

où $H_{t_{i-1}}$ est donc la valeur du processus H au début de l'intervalle $[t_{i-1}, t_i[$.

Interprétation

B_s = valeur à l'instant s d'un actif financier.

H_s = quantité d'actif B détenue par un investisseur au temps s; au début de la période $[t_{i-1}, t_i[$, celui-ci prend donc la décision d'acquérir une quantité d'actif $H_{t_{i-1}}$ et ne change pas cette décision tout au long de la période $[t_{i-1}, t_i[$.

Pendant cette période, l'actif va cependant fluctuer, et donc augmenter ou diminuer la fortune de l'investisseur à la fin de la période $[t_{i-1}, t_i[$, selon que $B_{t_i} > B_{t_{i-1}}$ ou $B_{t_i} < B_{t_{i-1}}$.

La quantité $H_{t_{i-1}} \, (B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$ représente le gain (ou la perte) effectué par l'investisseur sur la période $[t_{i-1}, t_i[$.

Ainsi, au vu de la définition ci-dessus, l'intégrale stochastique $\int_0^t H_s\,dB_s$ représente le gain total (ou la perte) effectué par l'investisseur sur la période $[0,t]$ avec la stratégie H.

Remarque

On pourrait avoir envie de définir l'intégrale stochastique$\int_0^t H_s\,dB_s$ comme une intégrale "classique" de Riemann en posant

$$\int_0^t H_s\,dB_s = \int_0^t H_s\,\frac{dB_s}{ds}\,ds.$$

Cependant, comme on l'a vu plus haut, les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas dérivables, donc $\frac{dB_s}{ds}$ n'existe pas, ce qui rend cette définition impossible. De plus, comme on va le voir plus loin, cette propriété de non-différentiabilité du mouvement brownien B se transmet à l'intégrale stochastique elle-même, ce qui en fait une intégrale étrange, dont les règles de calcul diffèrent des règles classiques du calcul différentiel et intégral.

Propriété de base de l'intégrale stochastique: espérance nulle et martingale

En reprenant l'interprétation ci-dessus, il est légitime de supposer qu'à un temps donné, l'investisseur n'a pas d'information sur l'évolution future du processus B après cet instant. Mathématiquement, cela se traduit par l'hypothèse que les variables $H_{t_{i-1}}$ et $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ sont indépendantes pour tout i. En conséquence, on obtient par la linéarité de l'espérance:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\int_0^t H_s\,dB_s\right) &= \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n H_{t_{i-1}}\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(H_{t_{i-1}}\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\left(H_{t_{i-1}}\right)\,\mathbb{E}\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) = 0,\end{aligned}$$

car $\mathbb{E}\left(B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\right) = 0$ pour tout i. Le processus $\int_0^t H_s\,dB_s$ a donc une espérance nulle au cours du temps, propriété qu'on a déjà rencontrée pour le mouvement brownien lui-même (on a en effet vu que $\mathbb{E}(B_t) = 0$ pour tout $t \geq 0$).

En fait, les processus $(B_t,\, t \geq 0)$ et $\left(\int_0^t H_s\,dB_s,\, t \geq 0\right)$ sont également appelés des *martingales*. Une martingale est un processus qui satisfait une condition plus forte que la seule condition d'avoir une espérance nulle. La définition rigoureuse de la notion de martingale fait cependant appel à la notion d'espérance conditionnelle, qui dépasse le cadre de ce cours. Une définition intuitive du concept de martingale est la suivante: supposons qu'on a observé un processus jusqu'au temps t et qu'on veuille estimer la valeur moyenne de ce processus à un temps ultérieur $t+s$; si cette valeur moyenne est égale à la valeur elle-même du processus au temps t, on dit que le processus est une martingale.

Pour illustrer cette propriété, considérons la marche aléatoire simple symétrique à temps discret: supposons qu'au temps n, S_n prenne la valeur x; alors l'espérance de S_{n+1} (supposant connu le fait que $S_n = x$) est donnée par $\frac{1}{2}\left((x+1)+(x-1)\right) = x$. La marche aléatoire symétrique simple est donc bien une martingale.

Extension de l'intégrale stochastique

Il est possible d'étendre la définition de l'intégrale stochastique ci-dessus à des processus H qui ne sont pas nécessairement constants par morceaux (on peut penser à un investisseur qui révise constamment la quantité d'actif investie au cours du temps). Les propriétés d'espérance nulle et de martingale restent toutes deux vérifiées dans ce cas.

Remarque

Il est intéressant de constater que beaucoup de propriétés du mouvement brownien se transmettent à l'intégrale stochastique: espérance nulle, martingale, mais aussi: les trajectoires du processus $\left(\int_0^t H_s\, dB_s,\ t \geq 0\right)$ sont continues, mais pas dérivables. Ceci n'est pas si surprenant quand on remarque que dans le cas où $H_s = 1$ pour tout s, $\int_0^t H_s\, dB_s = B_t$.

Processus d'Itô

Un processus d'Itô est un processus à temps continu $(X_t,\ t \in \mathbb{R}_+)$ qui peut s'écrire sous la forme:

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s, \tag{1}$$

où H et K sont deux processus à trajectoires continues. On retrouve donc:

- une *partie régulière*: $V_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds$, dont l'espérance $\mathbb{E}(V_t)$ peut évoluer au cours du temps, mais dont les trajectories sont dérivables: en effet, on a de manière classique:

$$\frac{dV_t}{dt} = K_t \quad \text{existe.}$$

- une *partie martingale*: $M_t = \int_0^t H_s\, dB_s$, dont l'espérance $\mathbb{E}(M_t)$ reste nulle au cours du temps, mais dont les trajectoires ne sont pas dérivables.

Par la linéarité de l'espérance, on obtient que $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(V_t + M_t) = \mathbb{E}(V_t) + \mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(V_t)$, du fait que $\mathbb{E}(M_t) = 0$. Le partie régulière V donne donc la tendance globale du processus X, tandis que la partie martingale M représente les fluctuations du processus X autour de cette moyenne.

Si $K_s \geq 0$ pour tout s, alors le processus V est croissant au cours du temps. Dans ce cas, on dit que le processus X est une *sous-martingale* (i.e. un processus qui fluctue, mais qui a tendance globalement à monter).

Si $K_s \leq 0$ pour tout s, alors le processus V est décroissant au cours du temps. Dans ce cas, on dit que le processus X est une *sur-martingale* (i.e. un processus qui fluctue, mais qui a tendance globalement à descendre).

Finalement, si $K_s = 0$ pour tout s, alors V est constant au cours du temps, et dans ce cas, X est simplement une martingale.

Remarque

L'appellation de sous- et sur-martingale est contre-intuitive; elle vient originellement de la notion de fonction sous- et sur-harmonique en analyse.

Notation différentielle

Au lieu d'écrire le processus X sous forme intégrale, comme dans l'équation (1), il arrive aussi qu'on l'écrive sous forme différentielle:

$$dX_t = K_t\, dt + H_t\, dB_t.$$

Cette notation est toutefois purement formelle, car les trajectoires du processus X ne sont pas dérivables.

1.4 Formule d'Itô-Doeblin

Rappel préliminaire: dérivation de la composition de deux fonctions

Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continûment dérivable et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, une autre fonction continûment dérivable. On écrit $(f \circ g)(t) = f(g(t))$ la composition de f et g. Alors la règle de dérivation classique est:

$$(f \circ g)'(t) = f'(g(t))\, g'(t),$$

ou de manière équivalente, sous forme intégrale:

$$f(g(t)) - f(g(0)) = \int_0^t f'(g(s))\, g'(s)\, ds. \tag{2}$$

On aimerait trouver une formule similaire dans le cas où on remplace la fonction g par une trajectoire du mouvement brownien B. Un problème se pose, car $\frac{dB_t}{dt}$ n'existe pas. Nous allons voir cependant qu'une formule alternative existe, qui mène à une nouvelle règle de calcul: le calcul stochastique.

Note historique

La formule qui suit porte traditionnellement le nom du mathématicien japonais Kiyoshi Itô, fondateur de la théorie du calcul stochastique dans les années 40. Elle a cependant été rebaptisée sous le nom de formule d'Itô-Doeblin, en hommage au mathématicien français Wolfgang Doeblin, lorsqu'on a découvert il y a une dizaine d'années qu'il avait trouvé ce résultat indépendamment alors qu'il combattait sur le front en juin 40, avant de décéder.

Première version

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction *deux fois* continûment dérivable et $B = (B_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien. Soit également $X = (X_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ le processus défini par $X_t = f(B_t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la relation suivante est vraie:

$$X_t - X_0 = f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(B_s)\, ds. \tag{3}$$

Notez tout de suite que si dans la formule (2), on faisait l'identification $g'(s)\, ds = \frac{dg(s)}{ds}\, ds = dg(s)$ et qu'on remplaçait naïvement $g(t)$ par B_t, alors on serait tenté d'écrire:

$$f(B_t) - f(B_0) = \int_0^t f'(B_s)\, dB_s,$$

qui est une formule fausse. Faire cette identification naïve, c'est ne pas prendre en compte le fait que les trajectoires du mouvement brownien ne sont pas dérivables, et donc que $\frac{dB_s}{ds}$ n'existe pas. Nous avons ici à faire à une nouvelle règle de calcul.

Remarques

- Pour appliquer la formule d'Itô-Doeblin, il importe donc que la fonction f soit deux fois continûment dérivable, à cause du terme correctif $\frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds$ qui apparaît dans la formule.

- La formule (3) nous montre également que le processus X est en réalité un processus d'Itô: $X_t = V_t + M_t$, avec

$$\begin{aligned} V_t &= X_0 + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\,ds : \quad \text{partie régulière;} \\ M_t &= \int_0^t f'(B_s)\,dB_s : \quad \text{partie martingale.} \end{aligned}$$

De plus, si f est une fonction convexe, i.e. $f''(x) \geq 0$ pour tout x, alors la partie régulière V est croissante, donc le processus $X = f(B)$ est une sous-martingale.

Si par contre f est une fonction concave, i.e. $f''(x) \leq 0$ pour tout x, alors la partie régulière V est décroissante, donc le processus $X = f(B)$ est une sur-martingale.

Finalement, si f est une fonction affine (i.e. $f''(x) = 0$ pour tout x, i.e. $f(x)$ est de la forme $f(x) = ax + b$), alors la partie régulière V est constante, donc le processus $X = f(B)$ est une martingale.

Exemples

- Soit $f(x) = x^2$; alors $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$. La formule d'Itô-Doeblin donne donc dans ce cas:

$$B_t^2 - B_0^2 = B_t^2 = \int_0^t 2B_s\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,ds = \int_0^t 2B_s\,dB_s + t.$$

Vu que la fonction t est croissante, le processus B_t^2 est donc une sous-martingale.

- Soit $f(x) = \exp(x)$; alors $f'(x) = \exp(x)$ et $f''(x) = \exp(x)$, donc

$$\exp(B_t) - \exp(B_0) = \exp(B_t) - 1 = \int_0^t \exp(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \exp(B_s)\,ds.$$

Ici aussi, $\exp(B_s) \geq 0$, donc le processus $\frac{1}{2}\int_0^t \exp(B_s)\,ds$ est croissant, ce qui implique que le processus $\exp(B_t)$ est une sous-martingale. De plus, on observe que si on remplace $\exp(B_t)$ par X_t dans l'équation ci-dessus, alors on obtient:

$$X_t - 1 = \int_0^t X_s\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t X_s\,ds.$$

Ceci est notre premier exemple d'*équation différentielle stochastique* (écrite sous forme intégrale!).

Deuxième version

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction une fois continûment dérivable en t et deux fois continûment dérivable en x, et soit $B = (B_t,\ t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien. Soit également $X = (X_t,\ t \in \mathbb{R}_+)$ le processus défini par $X_t = f(t, B_t)$ pour $t \in \mathbb{R}_+$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la relation suivante est vraie:

$$X_t - X_0 = f(t, B_t) - f(0, B_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\, dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)\, ds \tag{4}$$

Dans ce cas aussi, le processus X est un processus d'Itô: $X_t = V_t + M_t$, avec

$$\begin{aligned} V_t &= X_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s, B_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s) \right) ds : \quad \text{partie régulière;} \\ M_t &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, B_s)\, dB_s : \quad \text{partie martingale.} \end{aligned}$$

De là, on déduit que si la fonction $f(t,x)$ vérifie l'*équation aux dérivées partielles* suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 0 \quad \text{pour tous } t, x, \tag{5}$$

alors la partie régulière V est constante, donc le processus X est une martingale.

Note historique

L'équation (5) est connue sous le nom d'*équation de la chaleur*. C'est avec cette équation qu'Albert Einstein donna en 1905 la première description mathématique du mouvement brownien, suivi en 1926 par Norbert Wiener, qui donna une description plus complète. Ces deux travaux ont été réalisés cependant avant la naissance de la théorie des martingales, qui fut développée par Paul Lévy et Joseph Doob dans les années 30-40. Le nom de “mouvement brownien” vient quant à lui du botaniste Robert Brown qui observa au microscope le mouvement erratique de particules de pollen en suspension dans un liquide, mais qui ne donna aucune description mathématique du phénomène.

Exemples

- Soit $f(t,x) = x^2 - t$; alors $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -1$ et $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = 2x$, donc $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 2$. On voit donc ici qu'effectivement:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -1 + \frac{1}{2}\, 2 = 0, \quad \text{pour tous } t, x,$$

donc l'équation (5) est satisfaite, ce qui implique que le processus X donné par $X_t = f(t, B_t) = B_t^2 - t$ est une martingale. On remarque de plus que si on écrit la formule complète dans ce cas, alors on obtient:

$$B_t^2 - t = \int_0^t 2 B_s\, dB_s,$$

qui est le même résultat que celui obtenu dans le premier exemple avec la première version de la formule d'Itô-Doeblin.

- Soit $f(t,x) = \exp\left(x - \frac{t}{2}\right)$; alors $\dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\frac{1}{2}\, f(t,x)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = f(t,x)$, donc encore une fois, l'équation (5) est satisfaite:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -\frac{1}{2}\, f(t,x) + \frac{1}{2}\, f(t,x) = 0, \qquad \text{pour tous } t, x,$$

ce qui implique que le processus X donné par $X_t = f(t, B_t) = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)$ est une martingale. La formule complète donne

$$\exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right) - 1 = \int_0^t \exp\left(B_s - \frac{s}{2}\right)\, dB_s.$$

On observe ici que si on remplace $\exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)$ par X_t dans l'équation ci-dessus, alors on obtient:

$$X_t - 1 = \int_0^t X_s\, dB_s.$$

Ceci est notre deuxième exemple d'équation différentielle stochastique.

- Voir exercice 3 pour d'autres exemples.

1.5 Equations différentielles stochastiques

Rappel préliminaire: équations différentieilles ordinaires

Considérons l'équation linéaire:

$$\frac{dx(t)}{dt} = a\, x(t), \quad x(0) = x_0, \quad \text{avec} \quad a, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Pour trouver la solution d'une telle équation, on procède comme suit: on écrit formellement:

$$\frac{dx}{x} = a\, dt, \quad \text{puis on intègre:} \quad \int \frac{dx}{x} = \int a\, dt + c,$$

où c est la constante d'intégration. Ceci donne

$$\ln(x(t)) = at + c, \quad \text{et donc} \quad x(t) = \exp(at + c).$$

Finalement, en utilisant la condition initiale $x(0) = x_0$, on obtient:

$$x(t) = x_0\, \exp(at), \quad \text{pour} \quad t \geq 0.$$

En général, on peut résoudre de la même manière des équations du type:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad \text{où } f \text{ est une fonction de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R},$$

si on connaît une primitive de la fonction $\frac{1}{f(x)}$. Remarquez que suivant la fonction f, il se peut qu'il n'existe pas de solution de cette équation, ou au contraire, plusieurs solutions!

Venons-en maintenant aux équations différentielles stochastiques: une telle équation se présente sous la forme *intégrale* suivante:

$$X_t = x_0 + \int_0^t f(X_s)\, ds + \int_0^t g(X_s)\, dB_s, \tag{6}$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$, f, g sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et B est un mouvement brownien. Une solution de cette équation est un processus aléatoire $(X_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ satisfaisant la relation (6) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On a déjà vu plus haut deux exemples de processus X solutions de ce type d'équation. Notez que comme dans le cas des équations différentielles ordinaires, il se peut que l'équation ci-dessus n'admette pas de solution, ou au contraire, plusieurs, si les fonctions f et g ne satisfont pas certaines conditions.

Une question se pose maintenant: étant donné des fonctions f et g, comment résoudre l'équation ci-dessus? Une première difficulté est que la notation intégrale ne favorise pas l'intuition. On aimerait mieux écrire l'équation sous forme différentielle:

$$\frac{dX_t}{dt} = f(X_t) + g(X_t)\,\frac{dB_t}{dt}, \quad X_0 = x_0.$$

mais on se heurte à nouveau au problème que $\frac{dB_t}{dt}$ n'existe pas, donc l'équation ci-dessus n'a pas de sens. En fait, à moins que la fonction g soit partout égale à zéro, $\frac{dX_t}{dt}$ n'existe pas non plus! Cependant, nous allons quand-même nous autoriser à écrire l'équation (6) sous forme différentielle:

$$dX_t = f(X_t)\, dt + g(X_t)\, dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

C'est comme si on avait "multiplié par dt" l'équation précedente. Cette notation est purement formelle, mais elle permet de mieux se faire une idée de l'évolution du processus X au cours du temps.

La second difficulté plus importante concernant la résolution de l'équation (6) est que, contrairement au cas des équations différentielles ordinaires, étant donné deux fonctions f et g, il n'y a pas de recette systématique pour résoudre l'équation. En fait, pour beaucoup de fonctions f et g, on ne connaît tout simplement pas la solution, et la seule chose qu'on puisse faire est de simuler numériquement cette solution!

Par la suite, nous allons voir des cas particuliers d'équations où il est effectivement possible de calculer la solution. Mais à ce stade, il vaut tout de même la peine de mentionner que si $(X_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ est un processus solution de l'équation (6), alors on sait déjà quelque chose sur le processus, et ceci sans résoudre l'équation! De par sa forme, on voit en effet que X est un *processus d'Itô*, avec pour partie régulère:

$$V_t = x_0 + \int_0^t f(X_s)\, ds$$

et pour partie martingale:

$$M_t = \int_0^t g(X_s)\, dB_s.$$

De là, même sans connaître le processus X, on peut déduire plusieurs choses:

- Si f est une fonction positive (i.e. $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), alors le processus V est croissant et le processus X est une sous-martingale.

- Si f est une fonction négative (i.e. $f(x) \leq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$), alors le processus V est décroissant et le processus X est une sur-martingale.

- Si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors le processus X est une martingale ($X_t = \int_0^t g(X_s)\, dB_s$).

- Si $g(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors le processus X est un processus régulier et déterministe (c'est dans ce cas la solution de l'équation différentielle ordinaire $\frac{dX_t}{dt} = f(X_t)$).

Exemple important: l'équation de Black & Scholes

Cette équation se présente sous la forme suivante:

$$X_t = x_0 + \int_0^t \mu\, X_s\, ds + \int_0^t \sigma\, X_s\, dB_s, \tag{7}$$

où $x_0 > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et B est un mouvement brownien.

La solution $(X_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ de cette équation (qui, comme nous allons le voir ci-dessous, existe et est unique) représente l'évolution au cours du temps du prix d'un actif financier sur un marché boursier: x_0 est le prix initial au temps $t = 0$; le coefficient μ traduit la *dérive* du processus vers le haut ou vers le bas, selon que $\mu > 0$ ou $\mu < 0$, respectivement, et le coefficient $\sigma > 0$ traduit la *volatilité* du processus, autrement dit, l'amplitude moyenne de ses fluctuations.

Sous forme différentielle, l'équation ci-dessus s'écrit:

$$dX_t = \mu\, X_t\, dt + \sigma\, X_t\, dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Un faux calcul

Pour résoudre cette équation, on pourrait être tenté de procéder comme pour une équation différentielle ordinaire, en écrivant

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu\, dt + \sigma\, dB_t,$$

qu'on peut intégrer naïvement pour obtenir

$$\ln(X_t) - \ln(x_0) = \mu\, t + \sigma\, B_t \ ???$$

et donc

$$X_t = x_0\, \exp(\mu t + \sigma\, B_t) \ ???$$

Ce calcul se révèle pourtant être faux: L'erreur qu'on fait ici est d'utiliser une règle de calcul classique pour intégrer

$$\int \frac{dX_t}{X_t} = \ln(X_t) + c \ ???$$

alors que le processus X est un processus non-dérivable qui satisfait aux règles du calcul stochastique, qui sont différentes de celles dont on a l'habitude.

Résolution correcte de l'équation (6)

Dans l'exercice 4, il vous est demandé de montrer à l'aide de la formule d'Itô-Doeblin (deuxième version) que la solution de l'équation (6) s'écrit:

$$X_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right), \quad t \geq 0.$$

En fait, nous avons déjà vu ce calcul à deux reprises pour des valeurs particulières de μ et σ dans les exemples illustrant l'utilisation de la formule d'Itô-Doeblin. On observe ici que par rapport à la formule fausse obtenue auparavant, un terme correctif en $-\frac{\sigma^2}{2}\, t$ s'est immiscé dans l'exponentielle. Ce terme correctif est là pour compenser le terme

$$\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, B_s)\, ds$$

apparaissant dans la formule d'Itô-Doebllin.

On appelle le processus X un *mouvement brownien géométrique*. Une propriété importante du processus X est qu'il reste positif tout au long de son évolution, du fait qu'il s'exprime comme l'exponentielle de quelque chose (et du fait que $x_0 > 0$ par hypothèse).

1.6 Retour aux processus d'Itô

Intégrale stochastique par rapport à un processus d'Itô

Soit X un processus d'itô donné par

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s.$$

On rappelle ici la notation différentielle correspondante:

$$dX_t = K_t\, dt + H_t\, dB_t.$$

Soit maintenant un processus $\phi = (\phi_s,\ s \in [0,t])$ constant par morceaux. Plus précisément, soit $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = t$ une subdivision de l'intervalle $[0,t]$ telle que le processus ϕ reste constant sur les intervalles $[t_{i-1}, t_i[$. On définit alors *l'intégrale stochastique de ϕ par rapport à X* comme

$$\int_0^t \phi_s\, dX_s = \sum_{i=1}^n \phi_{t_{i-1}}\, (X_{t_i} - X_{t_{i-1}}),$$

où $\phi_{t_{i-1}}$ est la valeur du processus ϕ au début de l'intervalle $[t_{i-1}, t_i[$.

A nouveau, si le processus X décrit l'évolution du prix d'un actif au cours du temps, alors $\int_0^t \phi_s\, dX_s$ décrit le gain (ou la perte) réalisé sur la période $[0,t]$ en investissant avec la stratégie ϕ sur le processus X.

Comme pour l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien, cette définition se généralise au cas d'une stratégie ϕ qui n'est pas constante par morceaux.

En utilisant la forme différentielle du processus X, on voit que

$$\int_0^t \phi_s\, dX_s = \int_0^t \phi_s\, K_s\, ds + \int_0^t \phi_s\, H_s\, dB_s.$$

Ainsi, le processus Y définit par $Y_t = \int_0^t \phi_s\, dX_s$ est un processus d'Itô, avec partie régulière $\int_0^t \phi_s\, K_s\, ds$ et partie martingale $\int_0^t \phi_s\, H_s\, dB_s$. Si de plus $K_s = 0$ pour tout $s \geq 0$, alors X est une martingale et Y est aussi une martingale; la propriété de martingale est préservée par l'intégrale stochastique.

Formule d'Itô-Doeblin: troisième version

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,x) \mapsto f(t,x)$ une fonction une fois continûment dérivable en t et deux fois continûment dérivable en x, et soit $X = (X_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ un processus d'Itô donné par

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s.$$

Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la relation suivante est vraie:

$$f(t,X_t) - f(0,X_0) = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\, dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\, H_s^2\, ds. \quad (8)$$

Du fait que $dX_s = K_s\, ds + H_s\, dB_s$, cette formule se réécrit

$$\begin{aligned} & f(t,X_t) - f(0,X_0) \\ = & \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\, K_s + \frac{1}{2}\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\, H_s^2 \right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\, H_s\, dB_s. \end{aligned}$$

Ainsi, le processus $f(t,X_t)$ est lui aussi un processus d'Itô. La deuxième façon de l'écrire permet de distinguer clairement ses partie régulière et partie martingale, mais la formule (8) a l'avantage d'être plus compacte et de ressembler de près à la formule (4) pour le mouvement brownien (si ce n'est la présence de H_s^2 dans le dernier terme).

Exemple

- Soit X le processus solution de l'équation de Black & Scholes (7), qui s'exprime sous forme différentielle:

$$dX_t = \mu\, X_t\, dt + \sigma\, X_t\, dB_t,$$

et f une fonction qui satisfait aux hypothèses ci-dessus. Alors

$$\begin{aligned} & f(t,X_t) - f(0,X_0) \\ = & \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s) + \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\,\mu\,X_s + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\,\sigma^2\,X_s^2 \right)\,ds \\ & + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\,\sigma\,X_s\,dB_s. \end{aligned}$$

On remarque donc que si f est solution de l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) + \frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\,\mu x + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x)\,\sigma^2\,x^2 = 0 \quad \text{pour tous } t,x, \tag{9}$$

alors

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\,\sigma\,X_s\,dB_s$$

et le processus Y donné par $Y_t = f(t,X_t)$ est donc une martingale.

- Cette troisième version de la formule d'Itô-Doeblin permet également de résoudre *directement* l'équation (7). En effet, posons $Y_t = f(X_t)$, et rappelons que si $f(x) = \ln(x)$, alors $f'(x) = 1/x$ et $f''(x) = -1/x^2$. En appliquant la formule (8), on obtient:

$$\begin{aligned} \ln(X_t) - \ln(x_0) &= 0 + \int_0^t \frac{1}{X_s}\,dX_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{X_s^2}\,\sigma^2\,X_s^2\,ds \\ &= \int_0^t (\mu\,ds + \sigma\,dB_s) - \int_0^t \frac{\sigma^2}{2}\,ds = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\,t + \sigma B_t. \end{aligned}$$

De là, on déduit que

$$X_t = x_0\,\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\,t + \sigma B_t\right).$$

- Vous trouverez encore dans l'exercice 5 une autre application de cette troisième version de la formule d'Itô-Doeblin.

Dans la suite du cours, nous allons appliquer cette théorie à l'évaluation et à la couverture d'options en finance.

2 Mathématiques financières: évaluation et couverture d'options

2.1 Exposition du problème

Définition. Une *option* est un contrat établi entre deux parties A et B à un instant donné, qui confère un droit à l'une des deux parties à un instant futur (appelé la *maturité* de l'option), en échange d'une rémunération.

Par convention, on appellera A *l'acheteur* ou *client* (celui qui achète le droit) et B le *banquier* (celui qui reçoit la rémunération).

Exemple. *Option d'achat* (ou *call* en anglais). Au temps $t = 0$, B vend à A le droit suivant: à la maturité $t = T$, A pourra, s'il le désire, acheter à B un actif donné X (appelé aussi le *sous-jacent*) à un prix K (appelé le *prix d'exercice* ou *strike* en anglais) au lieu du prix X_T donné par le marché à cet instant.

Que se passe-t-il donc exactement dans cette situation?

• *Au temps* $t = 0$, A paye un certain prix c_0 à B pour acquérir ce droit.

• *Au temps* $t = T$, deux choses peuvent arriver:

- Si le prix de l'actif $X_T > K$, alors A exerce son droit et achète à B l'actif X_T au prix d'exercice K. A gagne ainsi $X_T - K$ francs dans ce cas.

- Si au contraire $X_T \leq K$, alors A n'exerce pas son droit (car ça lui ferait perdre de l'argent: il peut acheter l'actif X sur le marché à un prix moindre que le prix d'exercice) et ne gagne donc rien dans ce cas.

• Au total, A paye c_0 frances au temps $t = 0$ et reçoit $\max(X_T - K, 0)$ francs au temps $t = T$. On appelle c_0 la *prime*, ou plus simplement le prix de l'option, et $\max(X_T - K, 0)$ le *prix de revient* ou *payoff* en anglais. Il se peut donc que A gagne ou perde de l'argent au bout du compte.

Note. Historiquememt, on a d'abord proposé des options à des clients pour leur fournir une *assurance*: le client payait un certain montant au temps $t = 0$ pour s'assurer de pouvoir acheter une marchandise à un prix pas plus élevé que le prix d'exercice K à une date ultérieure $t = T$. On effectuait ces contrats d'assurance par exemple dans le cas de transactions sur des marchandises qui devaient traverser l'Atlantique, opération qui durait généralement plusieurs mois. De nos jours, des options sont échangées en permanence sur les marchés financiers, mais on a quelque peu oublié le but originel de celles-ci!

Question: Au temps $t = 0$, quel est le "juste prix" c_0 que doit payer A à B pour acquérir l'option d'achat décrite ci-dessus?

Une première approche naïve du problème consisterait à dire la chose suivante: l'acheteur dépense c_0 francs au temps 0 et reçoit $\max(X_T - K, 0)$ francs au temps $t = T$. Donc le juste prix à payer pour lui devrait être

$$c_0 = \mathbb{E}(\max(X_T - K, 0)),$$

de telle manière à ce qu'en moyenne, il ne fasse ni gain ni perte. Vu que le banquier reçoit quant à lui c_0 francs au temps $t = 0$ et doit débourser $\max(X_T - K, 0)$ francs au temps $t = T$, lui aussi ne ferait ni gain ni perte, en moyenne. Ceci correspond à la situation telle qu'elle était avant la théorie de Black, Scholes et Merton; le banquier estimait quelle devrait être l'évolution du processus dans l'intervalle de temps $[0, T]$ (en se basant sur l'historique du processus et d'autres considérations *ad hoc*), de sorte à pouvoir calculer l'espérance ci-dessus et fixer ainsi un prix c_0.

La théorie de Black, Scholes et Merton a radicalement changé les choses; il a effectivement été montré que pour un actif X dont l'évolution du prix au cours du temps suit le modèle de Black & Scholes vu au paragraphe précédent, le banquier est en mesure de réinvestir la somme d'argent c_0 reçue à l'instant initial $t = 0$, suivant une stratégie d'investissement $(\phi_s,\ s \in [0, T])$ sur le processus X, de telle manière à ce que

$$c_0 + \int_0^T \phi_s \, dX_s = \max(X_T - K, 0). \tag{10}$$

On rappelle ici que l'intégrale stochastique $\int_0^T \phi_s \, dX_s$ représente le gain réalisé sur la période $[0, T]$ en investissant avec la stratégie ϕ sur le processus X. La somme de c_0 et $\int_0^T \phi_s \, dX_s$ représente donc la fortune du banquier à l'instant T: en observant la formule ci-dessus, on voit que cette fortune est *exactement* égale au payoff de l'option, ce qui veut dire qu'à la fin de l'opération (i.e. après que le client soit venu éventuellement réclamer son dû), le bilan pour le banquier est *nul*: il s'est parfaitement couvert avec la prime c_0 payée par le client au temps $t = 0$. Dans ce cas, le banquier finit donc avec 0 francs *avec probabilité* 1, plutôt que 0 francs *en moyenne*, ce qui est très différent! La théorie de Black, Scholes et Merton permet donc au banquier de se couvrir parfaitement lorsqu'il vend une option d'achat à un client (mais ceci n'a lieu qu'en théorie seulement...).

Dans ce qui suit, nous supposerons connu le fait qu'un tel prix c_0 et une telle strateégie ϕ existent (et sont chacuns uniques), et nous nous appliquerons à les calculer explicitement.

Note historique Black[1], Scholes et Merton ont reçu le prix Nobel d'économie en 1997 pour leur théorie. Ils font partie ainsi des rares mathématiciens ayant eu le privilège de recevoir cette récompense...

A partir de maintenant, on effectue donc l'hypothèse (simplificatrice) que l'évolution du prix de l'actif X au cours du temps est donnée par la solution de l'équation de Black & Scholes:

$$dX_t = \mu X_t \, dt + \sigma X_t \, dB_t, \quad X_0 = x_0,$$

où $x_0 > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On rappelle ici que (voir paragraphes préceédents) que

$$X_t = x_0 \, \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma B_t\right).$$

[1]Black est en fait décédé l'année précedente; le prix Nobel n'a donc pas pu lui être attribué, car on ne peut décerner un prix Nobel à titre posthume.

Notre but par la suite est d'identifier le prix de l'option c_0 et la stratégie de couverture $(\phi_s,\ s \in [0,T])$ qui permettent de satisfaire l'équation (10).

2.2 Résolution du problème

Evaluation d'options: formule de Black & Scholes (cas $\mu = 0$)

Pour commencer, nous partons de l'hypothèse que $\mu = 0$. Dans ce cas, on a

$$dX_t = \sigma X_t \, dB_t, \quad X_t = x_0 \, \exp\left(\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2}\, t\right),$$

et le processus X est une martingale. De ce fait, pour toute stratégie ϕ, le gain réalisé sur la période $[0,T]$ a une espérance nulle:

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_s \, dX_s\right) = 0.$$

Ceci nous permet de conclure en prenant l'espérance dans l'équation (10) que

$$c_0 = \mathbb{E}(c_0) = \mathbb{E}(\max(X_T - K, 0)), \tag{11}$$

du fait que c_0 est un nombre et non une variable aléatoire. Dans ce cas particulier où $\mu = 0$, la première expression qu'un raisonnement naïf nous avait donnée pour le prix c_0 s'avère donc correcte. La formule ci-dessus porte le nom de *formule de Black & Scholes*, bien qu'écrite sous une forme peu explicite, car la dépendance du prix de l'option c_0 en fonction des paramètres du problème (T, x_0, K, σ) n'apparaît pas clairement.

Calcul explicite de c_0

Dans ce qui suit, nous détaillons le calcul de c_0 pour obtenir une formule plus explicite:

$$\begin{aligned} c_0 &= \mathbb{E}(\max(X_T - K, 0)) = \mathbb{E}\left(\max\left(x_0 \, \exp\left(\sigma B_T - \frac{\sigma^2}{2}\, T\right) - K, 0\right)\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \max\left(x_0 \, \exp\left(\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2}{2}\, T\right) - K, 0\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy, \end{aligned}$$

vu que $B_T = \sqrt{T}\, Y$, où Y est une variable gaussienne centrée réduite ($N(0,1)$). Analysons pour quelles valeurs de y le maximum ci-dessus est strictement positif. Il faut pour ça que

$$x_0 \, \exp\left(\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2}{2}\, T\right) - K > 0, \quad \text{i.e.} \quad \sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2 T}{2} > \ln\left(\frac{K}{x_0}\right),$$

ou encore

$$y > \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{K}{x_0}\right) - \frac{\sigma^2 T}{2}\right) := y_0.$$

Ainsi, l'intégrale ci-dessus se réécrit (noter que le maximm disparaît quand on intègre seulement de y_0 à ∞):

$$\begin{aligned}
c_0 &= \int_{y_0}^{\infty} \left(x_0 \exp\left(\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2}{2}T\right) - K \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= x_0 \int_{y_0}^{\infty} \exp\left(\sigma\sqrt{T}y - \frac{\sigma^2}{2}T\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy - K \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= x_0 \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(y-\sigma\sqrt{T})^2}{2}\right) dy - K \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \\
&= x_0 \int_{y_0-\sigma\sqrt{T}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz - K \int_{y_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy
\end{aligned}$$

où on a réuni les exponentielles dans la première intégrale pour former un carré parfait, puis on a effectué le changement de variable $z = y - \sigma\sqrt{T}$. On utilise maintenant la notation suivante pour la fonction de répartition d'une gaussienne centrée réduite

$$N(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Noter que par symétrie,

$$N(-x) = 1 - N(x) = \int_{x}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

Ainsi, on obtient

$$c_0 = x_0\, N(\sigma\sqrt{T} - y_0) - K\, N(-y_0).$$

En définissant encore

$$d_1 = \sigma\sqrt{T} - y_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{x_0}{K}\right) + \frac{\sigma^2 T}{2} \right) \quad \text{et} \quad d_2 = -y_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \left(\ln\left(\frac{x_0}{K}\right) - \frac{\sigma^2 T}{2} \right),$$

on obtient:finalement:

$$c_0 = x_0\, N(d_1) - K\, N(d_2). \tag{12}$$

qui est la version plus connue la formule de Black & Scholes, où la dépendance dans les paramètres du problèmes T, x_0, K, σ est explicite.

A noter qu'un calcul en tout point identique permet de conclure que le juste prix C_t à payer pour acquérir l'option au temps $0 < t < T$ est donné par $C_t = c(t, X_t)$, où

$$c(t,x) = x\, N(d_1(t,x)) - K\, N(d_2(t,x)), \quad \text{où} \quad \begin{cases} d_1(t,x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\ln\left(\dfrac{x}{K}\right) + \dfrac{\sigma^2\,(T-t)}{2} \right), \\[2ex] d_2(t,x) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \left(\ln\left(\dfrac{x}{K}\right) - \dfrac{\sigma^2\,(T-t)}{2} \right). \end{cases} \tag{13}$$

Noter également si $t = T$, alors le prix de l'option est donné logiquement par $C_T = \max(X_T - K, 0)$, i.e. le prix de l'option à l'échéance est simplement égal au payoff de celle-ci. On peut noter enfin que lorsque t se rapproche de l'échéance T, la fonction $c(t,x)$ se rapproche de la fonction $\max(x - K, 0)$.

Couverture d'options: "delta-hedging" (cas $\mu = 0$)

Le "truc" utilisé au paragraphe précédent, qui consiste à prendre l'espérance dans l'équation (10), permet de calculer directement le prix c_0 en esquivant le calcul de la stratégie ϕ. Intéressons-nous maintenant à cette stratégie de couverture.

Du fait que le prix à payer pour acquérir l'option au temps t est donné par $C_t = c(t, X_t)$, on obtient, an appliquant la troisième version de la formue d'Itô-Doeblin:

$$\begin{aligned} c(t, X_t) &= c(0, x_0) + \int_0^t \frac{\partial c}{\partial t}(s, X_s)\, ds + \int_0^t \frac{\partial c}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(s, X_s)\, \sigma^2\, X_s^2\, ds \\ &= c_0 + \int_0^t \left(\frac{\partial c}{\partial t}(s, X_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(s, X_s)\, \sigma^2\, X_s^2 \right) ds + \int_0^t \frac{\partial c}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s \end{aligned}$$

En particulier, pour $t = T$, on a

$$C(T, X_T) = c_0 + \int_0^T \left(\frac{\partial c}{\partial t}(s, X_s) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(s, X_s)\, \sigma^2\, X_s^2 \right) ds + \int_0^T \frac{\partial c}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s$$

Noter d'une part que $C(T, X_T) = C_T = \max(X_T - K, 0)$ par ce qui a été dit plus haut. D'autre part, on peut montrer que la fonction $c(t,x)$ calculée en (13) satisfait l'équation aux dérivées partielles suivante:

$$\frac{\partial c}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}(t,x)\, \sigma^2\, x^2 = 0 \quad \text{pour tous } t, x. \tag{14}$$

On obtient donc finalement:

$$\max(X_T - K, 0) = c_0 + \int_0^T \frac{\partial c}{\partial x}(s, X_s)\, dX_s,$$

ce qui permet de conclure par identification que la stratégie de couverture ϕ satisfaisant l'équation (10) est donnée par

$$\phi_s = \frac{\partial c}{\partial x}(s, X_s), \quad s \in [0, T].$$

A cause de la dérivée en x, cette stratégie de couverture de l'option est appelée "delta-hedging". Dans le cas du call, un calcul explicite donne (voir exercice 6):

$$\phi_s = \phi(s, X_s), \quad \text{où} \quad \phi(t,x) = \frac{\partial c}{\partial x}(t,x) = N(d_1(t,x)). \tag{15}$$

Onremarque ici que $\phi(t,x) = N(d_1(t,x))$ est un nombre compris entre 0 et 1 qui, lorsque t se rapproche de l'échéance T, se rapproche de 1 lorsque $x > K$ et de 0 lorsque $x < K$.

En se rappelant ici que $\phi(t,x)$ est la quantité d'actif possédée au temps t lorsque l'actif $X_t = x$, on voit logiquement que lorsque $x > K$, la stratégie de couverture consiste à acquérir une unité d'actif, de manière à pouvoir vendre celle-ci au client à l'échéance (vu que dans ce cas, le client va réclamer son dû), tandis que si $x < K$, alors la stratégie consiste à se défausser de l'actif (vu que dans ce cas, le client ne va pas exercer son droit à l'échéance).

Cas $\mu \neq 0$

Que se passe-t-il dans ce cas? Clairement, on ne peut plus utiliser le même argument que précédemment, car X n'est pas une martingale, et donc

$$\mathbb{E}\left(\int_0^T \phi_s \, dX_s\right) \neq 0, \qquad \text{pour une stratégie donnée } \phi.$$

Pour expliquer la procédure à suivre, un retour à la marche aléatoire symétrique s'impose; soit donc $(S_n,\, n \in \mathbb{N})$ la marche aléatoire définie par

$$S_0 = 0, \quad S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad \text{avec } X_n \text{ i.i.d. tels que } \mathbb{P}(X_n = +1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2.$$

Considérons maintenant le processus suivant:

$$\widetilde{S}_n = S_n + n\,(2p-1),$$

où $0 < p < 1$ est un paramètre différent de $1/2$, Ce processus n'est clairement pas une martingale, pour la simple raison que son espérance n'est pas constante au cours du temps. Cependant, si on échange la probabilité $\mathbb{P}$ avec une nouvelle probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ définie par

$$\widetilde{\mathbb{P}}(X_n = +1) = 1 - p \quad \text{et} \quad \widetilde{\mathbb{P}}(X_n = -1) = p,$$

alors on obtient que sous l'espérance correspondante $\widetilde{\mathbb{E}}$,

$$\widetilde{\mathbb{E}}(\widetilde{S}_n) = n\,\widetilde{\mathbb{E}}(X_1) + n\,(2p-1) = n\,((1-p)-p) + n\,(2p-1) = 0.$$

C'est-à-dire qu'on a trouvé une nouvelle probabilité factice $\widetilde{\mathbb{P}}$ sous laquelle le processus $\widetilde{S}_n$ est une martingale, alors qu'il n'est clairement pas une martingale sous la "vraie" probabilité $\mathbb{P}$.

Le même raisonnement s'applique au mouvement brownien: soit $B = (B_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien et $\widetilde{B}$ le processus défini par

$$\widetilde{B}_t = B_t + \frac{\mu}{\sigma}\, t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Le processus $\widetilde{B}$ n'est clairement ni une mouvement brownien, ni une martingale, pour la bonne raison que son espérance n'est pas constante au cours du temps (lorsque $\mu \neq 0$). Cependant, on peut montrer que, similairement au cas de la marche aléatoire à temps discret, il existe une autre probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ sous laquelle le processus $\widetilde{B}$ est une martingale et même plus: un mouvement brownien! Ce résultat est dû au mathématicien russe Girsanov.

Observons maintenant quelle conséquence ceci a sur le processus X. En partant de l'équation de Black & Scholes:

$$dX_t = \mu X_t\, dt + \sigma X_t\, dB_t = \sigma X_t \left(\frac{\mu}{\sigma}\, dt + dB_t \right) = \sigma X_t\, d\widetilde{B}_t,$$

on obtient donc facilement la relation entre X et $\widetilde{B}$. Vu que sous la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$, le processus $\widetilde{B}$ est un mouvement brownien, le processus X est une martingale sous cette même probabilité. On s'est donc ramené à la situation précédente, car pour toute stratégie ϕ, on aura

$$\widetilde{\mathbb{E}} \left(\int_0^T \phi_s\, dX_s \right) = 0.$$

Ceci nous permet de conclure en prenant la nouvelle espérance $\widetilde{\mathbb{E}}$ dans l'équation (10) que

$$c_0 = \widetilde{\mathbb{E}}(c_0) = \widetilde{\mathbb{E}}(\max(X_T - K, 0)).$$

A noter maintenant que le prix c_0 ne correspond plus à l'intuition initiale, car la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ est une probabilité factice qu'on utilise pour faire des calculs, et *pas* la vraie probabilité sous laquelle évolue l'actif.

Comment calculer ce nouveau prix c_9? En résolvant l'équation pour X ci-dessus, on trouve

$$X_t = x_0\, \exp\left(\sigma \widetilde{B}_t - \frac{\sigma^2 t}{2} \right),$$

et donc

$$c_0 = \widetilde{\mathbb{E}} \left(\max \left(x_0\, \exp\left(\sigma \widetilde{B}_T - \frac{\sigma^2 T}{2} \right) - K, 0 \right) \right).$$

Du fait que sous la nouvelle probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$, $\widetilde{B}_T$ est une varaible alátoire de moynne nulle et variance T, les calculs qui suivent sont *exactement les mêmes* que ceux des paragraphes précédents, ce qui fait qu'on obtient comme avant:

$$c_0 = x_0\, N(d_1) - K\, N(d_2),$$

avec d_1, d_2 identiques à ce qui précède. Le résultat ne *dépend donc pas de* μ, i.e. le prix de l'option n'est aucunement influencé oar la dérive du processus X! En poursuivant le raisonnement, on trouve qu'il en va de même pour la stratégie de couverture ϕ donnée par (15).

Ceci conclut cette brève introduction au calcul stochastique appliqué à l'évaluation et à la couverture d'options.

Exercices

1. Pour $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, on a $p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2})$. On admettra connu le résultat $\int_{\mathbb{R}} p_X(x)\, dx = 1$.

a) Calculer à partir de là $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Si X est une variable aléatoire continue avec fonction de densité $p_X(x)$, alors pour une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on a:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_{\mathbb{R}} g(x)\, p_X(x)\, dx.$$

Soit maintenant $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

b) Calculer $\mathbb{E}(X^4)$ et $\mathbb{E}(\exp(X))$.

2. Calculer la moyenne et la variance des processus à temps continu suivants:

a) $(M_t = B_t^2 - t,\ t \geq 0)$.

b) $(N_t = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right),\ t \geq 0)$.

3. Appliquer la formule d'Itô-Doeblin pour écrire les processus suivants sous la forme d'un processus d'Itô, i.e. $X_t = V_t + M_t$, où V_t est un processus régulier et M_t est une martingale.

a) $(X_t = B_t^3 - 3tB_t, t \geq 0)$.

b) $(X_t = B_t^4,\ t \geq 0)$.

c) $(X_t = \exp(B_t - t),\ t \geq 0)$.

Lesquels de ces processus sont des martingales? sous-martingales? sur-martingales?

4. A l'aide de la deuxième version de la formule d'Itô-Doeblin, vérifier que le processus $(X_t,\ t \in \mathbb{R}_+)$ défini par

$$X_t = x_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma\, B_t\right)$$

est solution de l'équation différentielle stochastique:

$$dX_t = \mu\, X_t\, dt + \sigma\, X_t\, dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

Pour quelles valeurs des paramètres μ (dérive) et σ (volatilité), le processus X est-il

a) un processus régulier?

b) une martingale?

c) une sous-martingale?

d) une sur-martingale?

5. Soit $(X_t,\, t \in \mathbb{R}_+)$ le processus de Black & Scholes:

$$dX_t = \mu\, X_t\, dt + \sigma\, X_t\, dB_t, \quad X_0 = x_0.$$

a) Calculer $\dfrac{\mathbb{E}(\ln(X_t))}{t}$ et $\dfrac{\ln(\mathbb{E}(X_t))}{t}$. Trouve-t-on la même chose?

b) On suppose maintenant que $\mu = 0$. Dans ce cas, le processus X est une martingale. Soit maintenant une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle(s) propriété(s) doit satisfaire la fonction φ pour garantir que le processus Y défini par $Y_t = \varphi(X_t)$, $t \in \mathbb{R}_+$, soit une sous-martingale?

c) Même question si $\mu \geq 0$: quelle(s) propriété(s) doit satisfaire la fonction φ pour garantir que le processus $Y = \varphi(X)$ soit une sous-martingale?

d) Et enfin si $\mu \leq 0$: quelle(s) propriété(s) doit satisfaire la fonction φ pour garantir que le processus $Y = \varphi(X)$ soit une sous-martingale?

6. Vérifier que la stratégie de couverture du call standard est donnée par

$$\phi_s = \phi(s, X_s), \quad \text{où} \quad \phi(t,x) = \frac{\partial c}{\partial x}(t,x) = N(d_1(t,x)),$$

où on rappelle que $c(t,x)$ est donné par $c(t,x) = x\, N(d_1(t,x)) - K\, N(d_2(t,x))$. Remarquer ici qu'il est faux de dire que d_1 et d_2 ne dépendent pas de x pour obtenir le résultat, même si celui-ci pourrait laisser penser qu'il en est ainsi.

7. Calculer le prix d_0 à l'instant $t = 0$ ainsi que la stratégie de couverture $(\phi_s,\, s \in [0,T])$ d'une *option digitale* dont le payoff à l'instant $t = T$ est donné par

$$1_{\{X_T \geq K\}} = \begin{cases} 1, & \text{si } X_T > K, \\ 0, & \text{si } X_T \leq K. \end{cases}$$