Discrete Structures EPFL, Fall 2013

Special Problem Set 8 – Midterm Preparation

Date: 8.11.2013 Not graded

Additional training for the midterm. On the following pages you can find the mock midterm given by Prof. Lenstra last year. Please note that even if the topics of the course have not changed substantially, the form of the midterm might be different, in the sense that this year's format also includes problems where you are required to write actual proofs. To train for induction proofs, which do not occur on the mock midterm, we also added the problem below.

Problem. Let f_n be the n-th element of the Fibonacci sequence which is recursively defined as

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \quad \text{for } n \geq 1 \end{cases}$$

Prove the following equalities.

(a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i^2 = f_n \cdot f_{n+1}$ for any $n \geq 1$.

(b) $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$ for any $n \geq 1$.

(c) Let $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. Then $A^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}$ for any $n \geq 1$.

1. Pour chaque sous-question ci-dessous, cochez l'unique réponse correcte.
For each subquestion below tick only the correct circle.

(a) Soit $f : \mathbf{R} - \{-2\} \to \mathbf{R} - \{1\}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$.
Let $f : \mathbf{R} - \{-2\} \to \mathbf{R} - \{1\}$, $x \mapsto \frac{x+1}{x+2}$.

○ f est injective mais f n'est pas surjective / f is injective but not surjective
○ f est surjective mais f n'est pas injective / f is surjective but not injective
○ f est bijective / f is bijective
○ f n'est pas une fonction / f is not a function

(b) Soit / Let $f : \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < 1\} \to \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 \leq x \leq 1\}$,

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si / if} \quad x = 1/2 \\ 1 & \text{si / if} \quad x = 1/3 \\ \frac{1}{n-2} & \text{si / if} \quad x = 1/n \text{ pour / for } n \in \mathbf{Z}, n > 3 \\ x & \text{autrement / otherwise.} \end{cases}$$

○ f n'est pas une fonction / f is not a function
○ f est bijective / f is bijective
○ f est injective mais f n'est pas surjective / f is injective but not surjective
○ f est surjective mais f n'est pas injective / f is surjective but not injective

(c) Soit / Let $f : \{x \mid x \in \mathbf{R}, -2 \leq x \leq 5\} \to \mathbf{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} 3 + \frac{3}{2}x & \text{pour / for} \quad -2 \leq x \leq 0 \\ \lfloor x \rfloor & \text{pour / for} \quad 0 \leq x < 2 \\ x^2 & \text{pour / for} \quad 2 \leq x \leq 5. \end{cases}$$

○ f est surjective mais f n'est pas injective / f is surjective but not injective
○ f n'est pas une fonction / f is not a function
○ f est bijective / f is bijective
○ f est injective mais f n'est pas surjective / f is injective but not surjective

2. Pour chaque sous-question ci-dessous, cochez l'unique réponse correcte.
For each subquestion below tick only the correct circle.

(a) Soient les deux propositions "la fonction $\log(n^n)$ est en $O(\log(n!))$" et "la fonction n^n est en $O(n!)$".
Given the two statements "the function $\log(n^n)$ is $O(\log(n!))$" and "the function n^n is $O(n!)$".

- ◯ Seulement la seconde est vraie / Only the second is true
- ◯ Elles sont vraies toutes les deux / They are both true
- ◯ Elles sont fausses toutes les deux / They are both false
- ◯ Seulement la première est vraie / Only the first is true

(b) Soient les deux propositions "$\forall t > 0 \; \forall \epsilon > 0 \; (\log(n))^t$ est en $O(n^\epsilon)$" et "$\forall k$ fixe $\log(n^k)$ est en $O(\log(n))$".
Given the two statements "$\forall t > 0 \; \forall \epsilon > 0 \; (\log(n))^t$ is $O(n^\epsilon)$" and "$\forall$ constant $k \; \log(n^k)$ is $O(\log(n))$".

- ◯ Elles sont fausses toutes les deux / They are both false
- ◯ Elles sont vraies toutes les deux / They are both true
- ◯ Seulement la première est vraie / Only the first is true
- ◯ Seulement la seconde est vraie / Only the second is true

(c) $f(x)$ est en $\Omega(g(x))$ si et seulement si $g(x)$ est en $O(f(x))$.
$f(x)$ is $\Omega(g(x))$ if and only if $g(x)$ is $O(f(x))$.

- ◯ "si" est vraie, "seulement si" est fausse
  the "if"-part is true, the "only if"-part is false
- ◯ "si" est fausse, "seulement si" est vraie
  the "if"-part is false, the "only if"-part is true
- ◯ "si" est vraie et "seulement si" est vraie
  the "if"-part is true and the "only if"-part is true
- ◯ "si" est fausse et "seulement si" est fausse
  the "if"-part is false and the "only if"-part is false

3. Pour chaque sous-question ci-dessous, cochez l'unique réponse correcte.
For each subquestion below tick only the circle that applies.

(a) Soient les propositions "$\forall x \exists y P(x,y)$" et "$\forall y \exists x P(x,y)$", où $P(x,y)$ est la fonction propositionelle "$x+y=x-y$" et où le domaine est $\mathbf{Z}$ pour x et y.
Given the statements "$\forall x \exists y P(x,y)$" and "$\forall y \exists x P(x,y)$", where $P(x,y)$ is the propositional function "$x+y=x-y$" and where the domain of discourse is $\mathbf{Z}$ for both x and y.

- ◯ Seulement la seconde est vraie / Only the second is true
- ◯ Elles sont vraies toutes les deux / They are both true
- ◯ Seulement la première est vraie / Only the first is true
- ◯ Elles sont fausses toutes les deux / They are both false

(b) Soient les propositions "$(\exists y \forall x\, R(x,y)) \rightarrow (\forall x \exists y\, R(x,y))$" et "$(\forall x \exists y\, Q(x,y)) \rightarrow (\exists y \forall x\, Q(x,y))$", où $R(x,y)$ et $Q(x,y)$ sont des fonctions propositionelles de x et y.
Given the statements "$(\exists y \forall x\, R(x,y)) \rightarrow (\forall x \exists y\, R(x,y))$" and "$(\forall x \exists y\, Q(x,y)) \rightarrow (\exists y \forall x\, Q(x,y))$", where $R(x,y)$ and $Q(x,y)$ are propositional functions of x and y.

- ◯ Elles sont fausses toutes les deux / They are both false
- ◯ Seulement la première est vraie / Only the first is true
- ◯ Elles sont vraies toutes les deux / They are both true
- ◯ Seulement la seconde est vraie / Only the second is true

(c) Soient les propositions "$\exists x \forall y (y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$" et "$\exists y \forall x (xy < 0 \rightarrow xy > 0)$", où le domaine est $\mathbf{R}$ pour x et y.
Given the two statements "$\exists x \forall y (y \neq 0 \rightarrow xy = 1)$" and "$\exists y \forall x (xy < 0 \rightarrow xy > 0)$", where the domain of discourse is $\mathbf{R}$ for both x and y.

- ◯ Seulement la première est vraie / Only the first is true
- ◯ Elles sont fausses toutes les deux / They are both false
- ◯ Seulement la seconde est vraie / Only the second is true
- ◯ Elles sont vraies toutes les deux / They are both true

4. Pour chaque sous-question ci-dessous, cochez l'unique réponse correcte.
For each subquestion below tick only the circle that applies.

(a) La proposition composée $(\neg(p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ est:
The compound proposition $(\neg(p \leftrightarrow q)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow \neg q)$ is:

○ une contradiction / a contradiction
○ une tautologie / a tautology
○ une contingence / a contingency
○ une contraposition / a contraposition

(b) La proposition composée $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ est:
The compound proposition $(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ is:

○ une contingence / a contingency
○ aucune des trois autres réponses / none of the three other answers
○ une tautologie / a tautology
○ une contradiction / a contradiction

(c) La proposition composée $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$ est:
The compound proposition $((p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)) \leftrightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)$ is:

○ une tautologie / a tautology
○ une contradiction / a contradiction
○ aucune des trois autres réponses / none of the three other answers
○ une contingence / a contingency

5. Pour chaque sous-question ci-dessous, cochez l'unique réponse correcte, où A, B et C sont des ensembles arbitraires contenus dans un univers fini U:
For each subquestion below, tick only the correct circle, where A, B and C are arbitrary sets contained in some finite universe U.

(a) Si $A \cap B = A \cup B$ alors:
If $A \cap B = A \cup B$ then:

- ○ B n'est pas inclus dans A / B is not contained in A
- ○ $|A| + |B|$ est pair / $|A| + |B|$ is even
- ○ $A = B = \emptyset$
- ○ A n'est pas inclus dans B / A is not contained in B

(b) Soit $D = \overline{A \cup \overline{B}} \cup \overline{A}$.
Let $D = \overline{A \cup \overline{B}} \cup \overline{A}$.

- ○ $\overline{A}$ n'est pas inclus dans D / $\overline{A}$ is not contained in D
- ○ $D = \overline{A}$
- ○ aucune des trois autres réponses / none of the three other answers
- ○ D n'est pas inclus dans $\overline{A}$ / D is not contained in $\overline{A}$

(c) Combien d'entiers dans l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, 104\}$ ont-ils au plus un facteur premier en commun avec 105?
How many integers in the set $\{1, 2, 3, \ldots, 104\}$ have at most one prime divisor in common with 105?

- ○ 92
- ○ 48
- ○ 44
- ○ 56

6. Pour chaque sous-question ci-dessous, cochez l'unique réponse correcte.
For each subquestion below, tick only the correct circle.

(a) Si les ensembles A et B avec $A \neq B$ sont tous deux non-numérables ("uncountable"), que peut-on dire de la numérabilité ("countability") de $A - B$?
If two sets A and B with $A \neq B$ are both uncountable, what can one say about the countability of $A - B$?

- ◯ $A - B$ est fini / $A - B$ is finite
- ◯ rien / nothing
- ◯ $|A - B| = \aleph_0$
- ◯ $A - B$ est non-numérable / $A - B$ is uncountable

(b) Soient $r \geq 0$ un nombre entier et $S(r) = \sum_{i=-r}^{r} (i-1)^{i-1}$.
Let $r \geq 0$ be an integer and let $S(r) = \sum_{i=-r}^{r} (i-1)^{i-1}$.

- ◯ $S(r) > 0 \leftrightarrow r \geq 0$
- ◯ $S(r) > 0$ seulement si $r \geq 2$ / $S(r) > 0$ only if $r \geq 2$
- ◯ $S(r) > 0 \leftrightarrow r \geq 1$
- ◯ $S(r) > 0 \leftrightarrow r \geq 2$

(c) Soient $r, s \in \mathbf{Z}$, $S(r,s) = \sum_{i=s}^{r-1} (i - r)$ et $T(r,s) = \sum_{j=1}^{s-r} (j + r - 1 - s)$.
Let $r, s \in \mathbf{Z}$, $S(r,s) = \sum_{i=s}^{r-1} (i - r)$ and $T(r,s) = \sum_{j=1}^{s-r} (j + r - 1 - s)$.

- ◯ $S(r+1, s) = T(r, s+1)$
- ◯ $S(r+1, s) = T(r+1, s)$
- ◯ $S(r+1, s) = T(s, r+1)$
- ◯ $S(r+1, s) = T(s+1, r)$