Discrete Structures EPFL, Fall 2013

Special Problem Set 14 – Final Exam Preparation

Date: 20.12.2013 Not graded

Additional training for the final. On the following pages you can find the mock final exam given by Prof. Lenstra last year. Please note that even if the topics of the course have not changed substantially, the form of the final exam might be different, in the sense that this year's format also includes problems where you are required to write actual proofs.

1a (Français) Soient $x_i > i$ pour $i = 1, 2, 3, 4$ des variables entières. Le nombre de solutions pour $\sum_{i=1}^{4} x_i < 22$ est de

- ◯ 120
- ◯ 330
- ◯ 364
- ◯ 1365

1b (Français) Soient les fonctions $p, m : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ suivantes: $p(x) = x+1$ si $x \neq 7$ et $p(7) = 0$, et $m(x) = x - 1$ si $x \neq 0$ et $m(0) = 7$.

Dans une grille toroïdale de 8×8 noeuds de calcul ("toroidal 8×8 mesh of processing nodes") $n_{i,j}$ avec $0 \leq i, j < 8$, chaque noeud $n_{i,j}$ est connexe à quatre autres noeuds, plus exactement aux noeuds $n_{k,\ell}$ avec $(k, \ell) \in \{(i, p(j)), (i, m(j)), (p(i), j), (m(i), j)\}$. Toutes les 128 arêtes ont la même longueur. Un signal partant de $n_{2,3}$ doit d'abord être traité en $n_{6,4}$, puis en $n_{2,7}$ avant de retourner en $n_{2,3}$. Le nombre de plus courts chemins le long desquels le signal peut être routé est de

- ◯ 80
- ◯ 175
- ◯ 700
- ◯ 1400

1a (English) Let $x_i > i$ for $i = 1, 2, 3, 4$ be integer variables. The number of solutions of $\sum_{i=1}^{4} x_i < 22$ is

- ◯ 120
- ◯ 330
- ◯ 364
- ◯ 1365

1b (English) Let the functions $p, m : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ be defined as follows: $p(x) = x + 1$ if $x \neq 7$ and $p(7) = 0$, and $m(x) = x - 1$ if $x \neq 0$ and $m(0) = 7$.

In a toroidal 8×8 mesh of processing nodes $n_{i,j}$ with $0 \leq i, j < 8$, each node $n_{i,j}$ is directly connected to four other nodes, namely to the nodes $n_{k,\ell}$ with $(k, \ell) \in \{(i, p(j)), (i, m(j)), (p(i), j), (m(i), j)\}$. All 128 edges have the same length. A signal originating at node $n_{2,3}$ needs to be processed first at node $n_{6,4}$, and then at node $n_{2,7}$ before it returns again to node $n_{2,3}$. The number of ways the signal can be routed in the shortest possible way is

- ◯ 80
- ◯ 175
- ◯ 700
- ◯ 1400

2a (Français) La probabilité qu'une main de poker de cinq cartes contienne précisément quatre rangs ("kinds", opposés aux couleurs) est de

- ◯ $13\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3/\binom{52}{5}$
- ◯ $\binom{13}{4}4^4 \cdot 4 \cdot 3/\binom{52}{5}$
- ◯ $\binom{13}{4}4^4 \cdot 4/\binom{52}{5}$
- ◯ $4\binom{13}{2}13^3/\binom{52}{5}$

2b (Français) Laquelle des propositions suivantes est **incorrecte**?

- ◯ le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable
- ◯ tout sous-ensemble de cardinalité infinie d'un ensemble non dénombrable est non dénombrable
- ◯ $\mathbf{N} \cup \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < 1\}$ est non dénombrable
- ◯ l'intersection de deux ensembles non dénombrables peut être infini dénombrable

2a (English) The probability that a five-card poker hand contains precisely four kinds is

- ◯ $13\binom{4}{2}\binom{12}{3}4^3/\binom{52}{5}$
- ◯ $\binom{13}{4}4^4 \cdot 4 \cdot 3/\binom{52}{5}$
- ◯ $\binom{13}{4}4^4 \cdot 4/\binom{52}{5}$
- ◯ $4\binom{13}{2}13^3/\binom{52}{5}$

2b (English) Which of the following statements is **incorrect**?

- ◯ the Cartesian product of finitely many countable sets is countable
- ◯ any subset of infinite cardinality of an uncountable set is uncountable
- ◯ $\mathbf{N} \cup \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < 1\}$ is uncountable
- ◯ the intersection of two uncountable sets can be countably infinite

3a (Français) Parmi n étudiants choisis au hasard, quelle est la probabilité qu'au plus trois d'entre eux aient leur anniversaire le premier jour de l'année (de 365 jours)?

- ○ $\sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} (1/365)^i (1 - 1/365)^{n-i}$
- ○ $1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} (1/365)^i (1 - 1/365)^{n-i}$
- ○ $\sum_{i=0}^{3} (1/365)^i (1 - 1/365)^{n-i}$
- ○ $\sum_{i=0}^{3} \binom{n}{i} (1/365)^i (1 - 1/365)^{n-i}$

3b (Français) Nous avons deux boîtes, contenant chacune 60 boules blanches. De plus, la première boîte contient 40 boules noires et la seconde contient 140 boules noires. Vous choisissez une boule en choisissant d'abord une boîte telle que la probabilité que la première boîte soit sélectionnée est de p avec $0 \leq p \leq 1$, puis en choisissant une boule au hasard dans cette boîte. Quelles sont les valeurs de p telles que si vous avez choisi une boule blanche, alors la probabilité que vous ayez choisi la première boîte est strictement supérieure à 2/3?

- ○ $p < 1/2$
- ○ $p = 1/2$
- ○ $p > 1/2$
- ○ cela ne peut être le cas pour aucune valeur de p

3a (English) Among n students chosen at random, what is the probability that at most three of them have a birthday on the first day of a year (of 365 days)?

- ○ $\sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} (1/365)^i (1 - 1/365)^{n-i}$
- ○ $1 - \sum_{i=0}^{2} \binom{n}{i} (1/365)^i (1 - 1/365)^{n-i}$
- ○ $\sum_{i=0}^{3} (1/365)^i (1 - 1/365)^{n-i}$
- ○ $\sum_{i=0}^{3} \binom{n}{i} (1/365)^i (1 - 1/365)^{n-i}$

3b (English) We have two boxes, both containing 60 white balls. Furthermore, the first box contains 40 black balls and the second box contains 140 black balls. You select a ball by first choosing one of the two boxes such that the first box is selected with probability p for some p with $0 \leq p \leq 1$, and by then picking a ball in this box at random. For what values of p is it the case that if you selected a white ball, then the probability that you selected the first box is more than 2/3?

- ○ $p < 1/2$
- ○ $p = 1/2$
- ○ $p > 1/2$
- ○ this cannot be the case for any value of p

4a (Français) Soient $a > b \geq 2$ des constantes. Soient les deux propositions "la fonction n^b est en $\Omega(n^a)$" et "la fonction n^b est en $O(b^n)$".

- ◯ elles sont fausses toutes les deux
- ◯ seule la première est vraie
- ◯ seule la seconde est vraie
- ◯ elles sont vraies toutes les deux

4b (Français) Soient $a > b \geq 2$ des constantes. Soient les deux propositions "la fonction $\log_n(a)$ est en $\Theta(\log_n(b))$" et "la fonction $a^{\log_b(n)}$ est en $O(b^{\log_a(n)})$".

- ◯ elles sont fausses toutes les deux
- ◯ seule la première est vraie
- ◯ seule la seconde est vraie
- ◯ elles sont vraies toutes les deux

4a (English) Let $a > b \geq 2$ be constants. Given the two statements "the function n^b is $\Omega(n^a)$" and "the function n^b is $O(b^n)$".

- ◯ they are both false
- ◯ only the first is true
- ◯ only the second is true
- ◯ they are both true

4b (English) Let $a > b \geq 2$ be constants. Given the two statements "the function $\log_n(a)$ is $\Theta(\log_n(b))$" and "the function $a^{\log_b(n)}$ is $O(b^{\log_a(n)})$".

- ◯ they are both false
- ◯ only the first is true
- ◯ only the second is true
- ◯ they are both true

5a (Français) Soient X et Y deux ensembles non vides de nombres réels, soit X le domaine du discours pour x et soit Y le domaine du discours pour y. Soit $P(x, y)$ la fonction propositionnelle "$\forall x \forall y(xy > 0 \to xy = 0)$"

- ○ $\forall X \forall Y P(x, y)$ est fausse
- ○ $P(x, y)$ est vraie seulement si $X = \{0\}$ ou $Y = \{0\}$
- ○ $P(x, y)$ peut être vraie même si $X \neq \{0\}$ et $Y \neq \{0\}$
- ○ $\forall X \forall Y P(x, y)$ est vraie

5b (Français) La proposition composée $((\neg p \wedge q) \to (r \oplus q)) \vee (\neg s \leftrightarrow p)$ est

- ○ une tautologie
- ○ une contingence
- ○ une contradiction
- ○ aucune ci-dessus

5a (English) Let X and Y be two non-empty sets of real numbers, let X be the domain of discourse for x and let Y be the domain of discourse for y. Let $P(x, y)$ be the propositional function "$\forall x \forall y(xy > 0 \to xy = 0)$"

- ○ $\forall X \forall Y P(x, y)$ is false
- ○ $P(x, y)$ is true only if $X = \{0\}$ or $Y = \{0\}$
- ○ $P(x, y)$ may be true even if $X \neq \{0\}$ and $Y \neq \{0\}$
- ○ $\forall X \forall Y P(x, y)$ is true

5b (English) The compound proposition $((\neg p \wedge q) \to (r \oplus q)) \vee (\neg s \leftrightarrow p)$ is

- ○ a tautology
- ○ a contingency
- ○ a contradiction
- ○ none of the above

6a (Français) Quelle est la fonction génératrice $G(x)$ de $a_n = a_{n-2} + a_{n-3}$ $(n \geq 3)$ avec $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$?

- ◯ $G(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$
- ◯ $G(x) = \frac{1}{1-x^2-x^3}$
- ◯ $G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$
- ◯ $G(x) = \frac{x}{1-x^2-x^3}$

6b (Français) Le nombre d'arrangements dans lesquels aucune femme n'est assise à côté de son mari lorque trois couples mariés sont assis ensemble au cinéma (occupant six sièges consécutifs) est de

- ◯ 192
- ◯ 240
- ◯ 480
- ◯ 528

(Indice: utilisez le principe d'inclusion-exclusion)

6a (English) What is the generating function $G(x)$ of $a_n = a_{n-2}+a_{n-3}$ $(n \geq 3)$ with $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 1$?

- ◯ $G(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$
- ◯ $G(x) = \frac{1}{1-x^2-x^3}$
- ◯ $G(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$
- ◯ $G(x) = \frac{x}{1-x^2-x^3}$

6b (English) The number of arrangements where no wife is sitting next to her husband when three married couples are seated together in the cinema (occupying six consecutive seats) is

- ◯ 192
- ◯ 240
- ◯ 480
- ◯ 528

(Hint: use the principle of inclusion-exclusion)

7a (Français) Soit $f : \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < 1\} \to \mathbf{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} 2 - \frac{1}{x} & \text{si} \quad 0 < x < 1/2 \\ \frac{1}{1-x} - 2 & \text{si} \quad 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

- ◯ f n'est pas injective et f n'est pas surjective
- ◯ f est injective mais f n'est pas surjective
- ◯ f est surjective mais f n'est pas injective
- ◯ f est bijective

7b (Français) Soit $P(n)$ pour $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ la fonction propositionnelle "si x et y sont des entiers strictement positifs avec $\max(x, y) = n$, alors $x = y$," qui est prouvé par récurrence:

Hypothèse de base $P(1)$ est vraie, car si $\max(x, y) = 1$ et x et y sont des entiers strictement positifs, alors $x = y$.

Hypothèse de récurrence Soit $k > 0$ et assumons que lorsque $\max(x, y) = k$ et x et y sont des entiers strictement positifs, alors $x = y$. Pour prouver que $P(k + 1)$ est vraie on utilise les étapes suivantes:

1. soit $\max(x, y) = k + 1$, où x et y sont des entiers strictement positifs.
2. il s'ensuit que $\max(x - 1, y - 1) = k$.
3. en applicant l'hypothèse de récurrence à $\max(x - 1, y - 1) = k$, on trouve que $x - 1 = y - 1$.
4. il découle de $x - 1 = y - 1$ que $x = y$ et donc que $P(k + 1)$ est vraie.

- ◯ seule l'hypothèse de base est incorrecte
- ◯ seule l'étape 2 de l'hypothèse de récurrence dans la preuve ci-dessus est incorrecte
- ◯ seule l'étape 3 de l'hypothèse de récurrence dans la preuve ci-dessus est incorrecte
- ◯ l'hypothèse de base, et l'étape 3 de l'hypothèse de récurrence dans la preuve ci-dessus, sont incorrectes toutes les deux

7a (English) Let $f : \{x \mid x \in \mathbf{R}, 0 < x < 1\} \to \mathbf{R}$,

$$x \mapsto \begin{cases} 2 - \frac{1}{x} & \text{if } \ 0 < x < 1/2 \\ \frac{1}{1-x} - 2 & \text{if } \ 1/2 \leq x < 1. \end{cases}$$

- ◯ f is not injective and not surjective
- ◯ f is injective but not surjective
- ◯ f is surjective but not injective
- ◯ f is bijective

7b (English) Let $P(n)$ for $n \in \mathbf{Z}_{>0}$ be the propositional function "if x and y are strictly positive integers with $\max(x, y) = n$, then $x = y$," which is proved using mathematical induction:

Basis step $P(1)$ is true, since if $\max(x, y) = 1$ and x and y are strictly positive integers, then $x = y$.

Inductive step Let $k > 0$ and assume that whenever $\max(x, y) = k$ and x and y are strictly positive integers, then $x = y$. To prove that $P(k + 1)$ is true we use the following steps:

1. let $\max(x, y) = k + 1$, where x and y are strictly positive integers.
2. it follows that $\max(x - 1, y - 1) = k$.
3. applying the induction hypothesis to $\max(x - 1, y - 1) = k$, we find that $x - 1 = y - 1$.
4. it follows from $x - 1 = y - 1$ that $x = y$ and thus that $P(k + 1)$ is true.

- ◯ only the basis step in the above proof is incorrect
- ◯ only step 2 of the inductive step in the above proof is incorrect
- ◯ only step 3 of the inductive step in the above proof is incorrect
- ◯ both the basis step and step 3 of the inductive step in the above proof are incorrect