

Exercice 1 *Petit entraînement avec la notation de Dirac*

Prendre $b=0$. On trouve :

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$

Prendre $b=1$. On trouve :

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

Notez que en général

$$H|b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^b|1\rangle) = \sum_{c=0,1} (-1)^{bc}|c\rangle$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} H \otimes H|0\rangle \otimes |0\rangle &= H|0\rangle \otimes H|0\rangle \\ &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2})^2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle). \end{aligned}$$

En général pour $(b_1 b_2) = (00), (01), (10), (11)$:

$$\begin{aligned} H \otimes H|b_1\rangle \otimes |b_2\rangle &= H|b_1\rangle \otimes H|b_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{c_1} (-1)^{b_1 c_1} |c_1\rangle \otimes \sum_{c_2} (-1)^{b_2 c_2} |c_2\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sum_{c_1, c_2} (-1)^{b_1 c_1} (-1)^{b_2 c_2} |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \sum_{c_1, c_2} (-1)^{b_1 c_1 + b_2 c_2} |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle. \end{aligned}$$

Exercice 2 Variation sur l'interféromètre de Mach-Zehnder.

(a) **Calculation for $|h\rangle$:**

$$S|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + |v\rangle),$$

$$R|h\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |v\rangle,$$

$$P|h\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |abs\rangle.$$

Calculation for $|v\rangle$:

$$S|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle - |v\rangle),$$

$$R|v\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |h\rangle,$$

$$P|v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |v\rangle.$$

Calculation for $|abs\rangle$:

$$S|abs\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |abs\rangle,$$

$$R|abs\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |abs\rangle,$$

$$P|abs\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |h\rangle.$$

(b) Initially the state is $|h\rangle$. After the first semi transparent mirror :

$$S|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + |v\rangle).$$

After the two mirrors

$$RS|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle + |h\rangle),$$

and after the "atom" :

$$PRS|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(P|v\rangle + P|h\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle + |abs\rangle).$$

After the second semi transparent mirror :

$$SPRS|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + |v\rangle) + |abs\rangle\right) = \frac{1}{2}|h\rangle + \frac{1}{2}|v\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|abs\rangle.$$

Therefore, the state of the photon just after the second semi transparent mirror (just before the detection) is $\frac{1}{2}|h\rangle + \frac{1}{2}|v\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|abs\rangle$ and we have

$$\text{Prob}(\mathcal{D}_1) = \frac{1}{4}, \text{Prob}(\mathcal{D}_2) = \frac{1}{4}, \text{Prob}(\text{abs}) = \frac{1}{2},$$

because for example

$$\text{Prob}(\text{abs}) = |\langle abs | (\frac{1}{2}|h\rangle + \frac{1}{2}|v\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|abs\rangle)|^2 = \frac{1}{2}.$$

(c) The matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

is not unitary. This can be checked explicitly. For example

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I.$$

Thus, it can not model the absorption process of the photon by the atom.

The matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

is unitary. Indeed

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Thus, it may model the absorption of the photon. Note also that this matrix acts like a Hadamard matrix on the subspace $\{|h\rangle, |abs\rangle\}$.

Exercice 3 Représentations sur la sphere de Bloch.

(a) $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, which is *diagonal*, thus

$$e^{i\lambda Z} = \begin{pmatrix} e^{i\lambda} & 0 \\ 0 & e^{-i\lambda} \end{pmatrix}$$

So $e^{i\lambda Z} |\uparrow\rangle = e^{i\lambda} |\uparrow\rangle$ and both vectors $|\uparrow\rangle$ and $e^{i\lambda Z} |\uparrow\rangle$ are along z-axis. See fig.1

(b) Here $e^{i\frac{\phi}{2}Z} = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\phi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$ and $\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. Then

$$e^{i\frac{\phi}{2}Z} \left(\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{e^{i\frac{\phi}{2}} |\uparrow\rangle + e^{-i\frac{\phi}{2}} |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = e^{i\frac{\phi}{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \right).$$

We have a vector with $(\theta, \phi) = (\frac{\pi}{4}, -\phi)$. see fig 3. We see that the matrix $e^{i\frac{\phi}{2}Z}$ acts as a matrix of rotation of angle $-\phi$ around the z axis.

(c) We have

$$\begin{aligned} e^{it\frac{\omega}{2}Z} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\rangle \right) &= \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{it\frac{\omega}{2}} |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-it\frac{\omega}{2}} |\downarrow\rangle \\ &= e^{it\frac{\omega}{2}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |\uparrow\rangle + e^{i(\phi-t\omega)} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |\downarrow\rangle \right). \end{aligned}$$

The angle θ stays fixed and the angle ϕ varies as $\phi \rightarrow \phi - t\omega$. The resulting trajectory is a circle around the z-axis where the period is given by $-T\omega = -2\pi$ which gives $T = \frac{2\pi}{\omega}$. See fig 4.

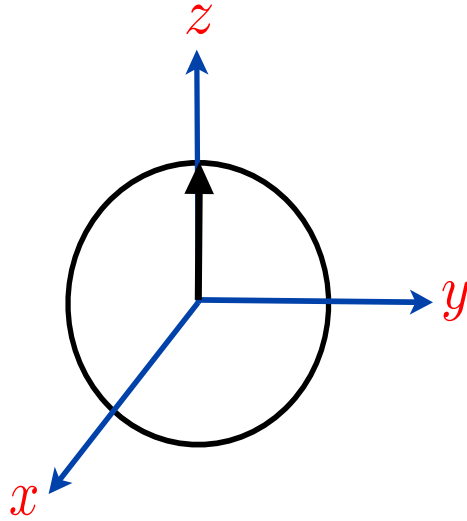


FIGURE 1 – fig.1

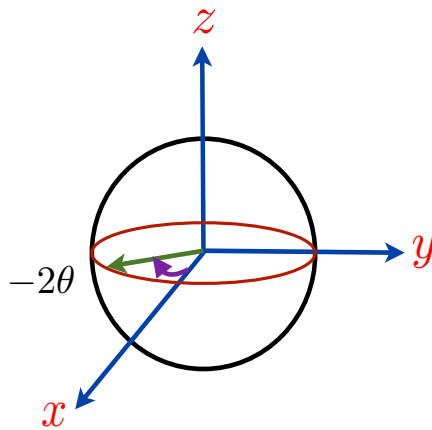


FIGURE 2 – fig.3. The -2θ in this figure is meant to be a $-\phi$.

Exercice 4 *Billets de banque quantiques.*

- (a) La banque ne veut pas détruire le billet quantique. Donc elle doit faire des mesures dans des bases qui ne perturbe pas les états des photons. A partir du numéro de série S elle sait dans quelle base les états des photons ont été préparés. Elle fait donc une mesure de la polarisation dans la "bonne base" : ainsi l'état qui est déjà un des vecteurs de base ne change pas (ou est projeté sur lui même avec probabilité 1!). La banque observe ainsi que tous les photons sont dans un état correct, et ceci sans détruire le billet.
- (b) Le malfaiteur ne peut pas copier le billet avec une seule machine quantique (unitaire) à cause du théorème de non-clonage (no-cloning theorem). Notez qu'il est fondamental d'utiliser un ensemble non-orthogonal d'états de photons pour préparer le billet de banque (sinon on pourrait copier les état avec une seule machine unitaire).

Exercice 5 *Inégalités de Bell pour des états produits (non intriqués)*

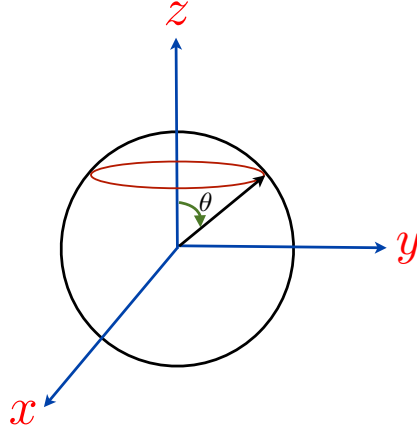


FIGURE 3 – fig 4.

1. $|\psi\rangle = |\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle$. On utilise

$$\begin{aligned} A \otimes B &= \left(|\alpha\rangle \langle\alpha| - |\alpha_{\perp}\rangle \langle\alpha_{\perp}| \right) \otimes \left(|\beta\rangle \langle\beta| - |\beta_{\perp}\rangle \langle\beta_{\perp}| \right) \\ &= |\alpha\beta\rangle \langle\alpha\beta| - |\alpha\beta_{\perp}\rangle \langle\alpha\beta_{\perp}| - |\alpha_{\perp}\beta\rangle \langle\alpha_{\perp}\beta| + |\alpha_{\perp}\beta_{\perp}\rangle \langle\alpha_{\perp}\beta_{\perp}|. \end{aligned}$$

Pour obtenir l'égalité ci-dessus on utilise $|\alpha\rangle \langle\alpha| \otimes |\beta\rangle \langle\beta| = (|\alpha\rangle \otimes |\beta\rangle)(\langle\alpha| \otimes \langle\beta|) = |\alpha\beta\rangle \langle\alpha\beta|$. De plus on note que

$$\langle\gamma\delta|\alpha\beta\rangle \langle\alpha\beta|\gamma\delta\rangle = \langle\gamma|\alpha\rangle \langle\delta|\beta\rangle \langle\alpha|\gamma\rangle \langle\beta|\delta\rangle = |\langle\alpha|\gamma\rangle|^2 |\langle\beta|\delta\rangle|^2$$

On déduit

$$\begin{aligned} \langle\gamma, \delta| A \otimes B |\gamma, \delta\rangle &= |\langle\alpha|\gamma\rangle|^2 |\langle\beta|\delta\rangle|^2 - |\langle\alpha|\gamma\rangle|^2 |\langle\beta_{\perp}|\delta\rangle|^2 \\ &\quad - |\langle\gamma|\alpha_{\perp}\rangle|^2 |\langle\beta|\delta\rangle|^2 + |\langle\alpha_{\perp}|\gamma\rangle|^2 |\langle\beta_{\perp}|\gamma\rangle|^2 \\ &= \cos^2(\alpha - \gamma) \cos^2(\beta - \delta) - \cos^2(\alpha - \gamma) \sin^2(\beta - \delta) \\ &\quad - \sin^2(\gamma - \alpha) \cos^2(\beta - \delta) + \sin^2(\alpha - \gamma) \sin^2(\beta - \delta) \\ &= \cos^2(\alpha - \gamma) \cos(2(\beta - \delta)) - \sin^2(\alpha - \gamma) \cos(2(\beta - \delta)) \\ &= \cos(2(\alpha - \gamma)) \cos(2(\beta - \delta)). \end{aligned}$$

Notez que ce résultats est très différent du résultat obtenu en cours quand l'état est intriqué de Bell.

2. Le coefficient de corrélation pour l'état produit est

$$\begin{aligned} X &= \cos(2(\alpha - \gamma)) \cos(2(\beta - \delta)) + \cos(2(\alpha - \gamma)) \cos(2(\beta' - \delta)) - \cos(2(\alpha' - \gamma)) \cos(2(\beta - \delta)) \\ &\quad + \cos(2(\alpha' - \gamma)) \cos(2(\beta' - \delta)) \end{aligned}$$

Celui-ci peut s'écrire

$$X = \cos(2(\alpha - \gamma)) \left(\cos(2(\beta - \delta)) + \cos(2(\beta' - \delta)) \right) + \cos(2(\alpha' - \gamma)) \left(\cos(2(\beta' - \delta)) - \cos(2(\beta - \delta)) \right)$$

et est de la forme $x(u+v) + y(u-v)$ où x, y, u, v sont dans $[-1, +1]$. Si on fixe d'abord x et y comme le terme est linéaire en u et v le max est atteint sur un point extrémal du carré $[-1, 1] \times [-1, +1]$ (c'est à dire un des 4 coins; pensez à un plan incliné). Si le max est atteint pour $u = v = \pm 1$ on trouve $\pm 2x$ qui est dans $[-2, +2]$. Si le max est atteint pour $u = -v = \pm 1$ on trouve $\pm 2y$ qui est dans $[-2, +2]$. Donc pour toutes valeurs des angles

$$|X| \leq 2$$

cqfd.

Exercice 6 *Exercice facultatif. Effet de l'environnement dans l'expérience de Young*

1. Photon observé dans l'état $|1\rangle$

L'état final du système C60 plus photon est en notation de Dirac $|\vec{r}\rangle \otimes |1\rangle$ où \vec{r} est la position observée sur l'écran. D'après le postulat de la mesure, la probabilité de cette observation est donc :

$$\begin{aligned} |(\langle \vec{r} | \otimes \langle 1 |)(|\psi_1\rangle \otimes |1\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |2\rangle)|^2 &= |\langle \vec{r} | \psi_1\rangle \langle 1 | 1\rangle + \langle \vec{r} | \psi_2\rangle \langle 1 | 2\rangle|^2 \\ &= |\langle \vec{r} | \psi_1\rangle|^2 \end{aligned}$$

puisque $\langle 1 | 2\rangle = 0$ et $\langle 1 | 1\rangle = 1$. De plus $\langle \vec{r} | \psi_1\rangle = \psi_1(\vec{r}) = \frac{A}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} e^{i(k|\vec{r} - \vec{r}_1| - \omega t)}$ et on trouve donc :

$$|\langle \vec{r} | \psi_1\rangle|^2 = \frac{A^2}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^2} \approx \frac{A^2}{D^2}.$$

Ainsi on n'observe pas de franges d'interférences. Notez que si l'on ne fait pas la dernière approximation on obtient une probabilité en forme de cloche centrée en face de la fente \vec{r}_1 .

2. Photon observé dans l'état $|2\rangle$

Avec $|2\rangle$ à la place de $|1\rangle$ on obtient un résultat identique. On observera donc une probabilité en forme de cloche centrée en face de la fente \vec{r}_2 .

3. Plusieurs expériences

Le photon est à chaque fois observé dans l'état $|1\rangle$ ou dans l'état $|2\rangle$. Les deux événements sont exclusifs. Donc l'intensité observée \vec{r} est

$$|\langle \vec{r} | \psi_1\rangle|^2 + |\langle \vec{r} | \psi_2\rangle|^2$$

donnée par la somme des probabilités des deux événements. Ainsi on n'observe pas de franges d'interférences.

Cette somme est $\approx \frac{2A^2}{D^2}$ (pour $D \gg d$).

4. Photon observé dans l'état $|0\rangle$

On a :

$$\begin{aligned} |(\langle \vec{r} | \otimes \langle 0 |)(|\psi_1\rangle \otimes |0\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |0\rangle)|^2 &= |\langle \vec{r} | \psi_1\rangle \langle 0 | 0\rangle + \langle \vec{r} | \psi_2\rangle \langle 0 | 0\rangle|^2 \\ &= |\langle \vec{r} | \psi_1\rangle + \langle \vec{r} | \psi_2\rangle|^2 \\ &= (\langle \vec{r} | \psi_1\rangle + \langle \vec{r} | \psi_2\rangle) \overline{(\langle \vec{r} | \psi_1\rangle + \langle \vec{r} | \psi_2\rangle)} \\ &= (\langle \vec{r} | \psi_1\rangle + \langle \vec{r} | \psi_2\rangle) (\overline{\langle \vec{r} | \psi_1\rangle} + \overline{\langle \vec{r} | \psi_2\rangle}) \\ &= |\langle \vec{r} | \psi_1\rangle|^2 + \langle \vec{r} | \psi_1\rangle \overline{\langle \vec{r} | \psi_2\rangle} + \langle \vec{r} | \psi_2\rangle \overline{\langle \vec{r} | \psi_1\rangle} + |\langle \vec{r} | \psi_2\rangle|^2 \\ &= \frac{2A^2}{D^2} + \frac{A^2}{D^2} e^{-ik(|\vec{r} - \vec{r}_2| - |\vec{r} - \vec{r}_1|)} + \frac{A^2}{D^2} e^{ik(|\vec{r} - \vec{r}_2| - |\vec{r} - \vec{r}_1|)} \\ &= \frac{A^2}{D^2} (2 + 2 \cos(k(|\vec{r} - \vec{r}_2| - |\vec{r} - \vec{r}_1|))) \\ &= \frac{A^2}{D^2} (2 + 2 \cos(kd \sin \theta)) \end{aligned}$$

On observe donc à nouveau des franges d'interférences !

Remarque : en utilisant $\cos \alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ vous pouvez vérifier que la dernière expression est égale à

$$\frac{4A^2}{D^2} \cos^2\left(\frac{kd}{2} \sin \theta\right)$$

qui est encore égale à (en utilisant $k = 2\pi/\lambda$,

$$\frac{4A^2}{D^2} \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta\right)$$

comme dans la série 1.