

Exercice 1 *Propriétés des matrices de Pauli*

1. On a :

$$A = a_0 I + a_1 \sigma_x + a_2 \sigma_y + a_3 \sigma_z = \begin{pmatrix} a_0 + a_3 & a_1 - ia_2 \\ a_1 + ia_2 & a_0 - a_3 \end{pmatrix}$$

Soit $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$. On doit avoir :

$$\begin{cases} a_0 + a_3 = a_{11} \\ a_0 - a_3 = a_{22} \end{cases}$$

ce qui implique $a_0 = \frac{a_{11} + a_{22}}{2}$ et $a_3 = \frac{a_{11} - a_{22}}{2}$.

D'autre part on doit avoir :

$$\begin{cases} a_1 - ia_2 = a_{12} \\ a_1 + ia_2 = a_{21} \end{cases}$$

ce qui implique $a_1 = \frac{a_{12} + a_{21}}{2}$ et $a_2 = \frac{a_{21} - a_{12}}{2i}$.

Donc toute matrice 2×2 A peut s'écrire :

$$A = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} I + \frac{a_{12} + a_{21}}{2} \sigma_x + \frac{a_{21} - a_{12}}{2i} \sigma_y + \frac{a_{11} - a_{22}}{2} \sigma_z.$$

Notez que si $A = A^\dagger$ on doit avoir $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

Nous vérifions à chaque fois uniquement la première relation.

2.

$$\begin{aligned} [\sigma_x, \sigma_y] &= \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2i & 0 \\ 0 & -2i \end{pmatrix} = 2i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2i \sigma_z \end{aligned}$$

Les autres calculs sont similaires. Remarquez que les relations s'obtiennent de la première par permutation cyclique de xyz .

$$\begin{aligned} \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0. \end{aligned}$$

$$\sigma_x^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

Puisque $\sigma_x \sigma_y = -\sigma_y \sigma_x$ on a :

$$\sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x = 2\sigma_x \sigma_x.$$

Puisque $[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z$ on déduit $\sigma_x \sigma_y = i\sigma_z$.

3.

$$\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z \quad \text{par définition}$$

$$\begin{aligned} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 &= (n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z) (n_x \sigma_x + n_y \sigma_y + n_z \sigma_z) \\ &= n_x^2 \sigma_x^2 + n_y^2 \sigma_y^2 + n_z^2 \sigma_z^2 \\ &\quad + n_x n_y \sigma_x \sigma_y + n_y n_x \sigma_y \sigma_x \\ &\quad + n_x n_z \sigma_x \sigma_z + n_z n_x \sigma_z \sigma_x \\ &\quad + n_y n_z \sigma_y \sigma_z + n_z n_y \sigma_z \sigma_y \\ &= (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) I = I \end{aligned}$$

Dans la seconde égalité on a fait attention au fait que les matrices de Pauli ne commutent pas. Dans la troisième on a utilisé les relations sous 2. Dans la dernière égalité on a utilisé que \vec{n} est un vecteur unité (sa norme vaut 1).

Cette identité implique $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^3 = \vec{n} \cdot \vec{\sigma}$; $(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^4 = I$; etc...

Ainsi

$$\begin{aligned} \exp(it\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(it)^k}{k!} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^k \\ &= \sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} I + \left\{ \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} \right\} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) \end{aligned}$$

D'autre part

$$\cos t = \sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} \quad \text{et} \quad i \sin t = \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} \quad (*)$$

(Parenthèse : Voir un formulaire, ou bien notez que

$$e^{it} = \cos t + i \sin t \quad \text{et donc :}$$

$$\sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} + \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} = \cos t + i \sin t,$$

ensuite en changeant $t \rightarrow -t$ on a aussi

$$\sum_{k \text{ pairs}} \frac{(it)^k}{k!} - \sum_{k \text{ impairs}} \frac{(it)^k}{k!} = \cos t - i \sin t,$$

et en additionnant et soustrayant on trouve (*).

Finalement on a bien prouvé :

$$\exp(it\vec{n} \cdot \vec{\sigma}) = (\cos t)I + (i \sin t)\vec{n} \cdot \vec{\sigma}$$

4. Ecrivez explicitement les matrices 2×2 !

5. Diagonalisation de σ_x .

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} v_1 = \lambda v_2 \\ v_2 = \lambda v_1 \end{cases}$$

$\implies v_1 = \lambda^2 v_1$ et $v_2 = \lambda^2 v_2$. Pour avoir $v_1 v_2 \neq 0$ il faut $\lambda^2 = +1$ et donc $\lambda = \pm 1$.
les valeurs propres sont ± 1 .

Le vecteur propre associé à $\lambda = +1$ satisfait à

$$v_1 = v_2 \quad \text{et} \quad v_2 = v_1.$$

$$\implies \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre normalisé}$$

Le vecteur propre associé à $\lambda = -1$ satisfait à :

$$v_1 = -v_2 \quad \text{et} \quad v_2 = -v_1.$$

$$\implies \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre normalisé}$$

Diagonalisation de σ_y .

On peut procéder comme avant. On peut aussi trouver les valeurs propres en résolvant :

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & -i \\ i & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (-i)(i) = \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$$

Le vecteur propre associé à $\lambda = +1$ satisfait à :

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = +1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -iv_2 = v_1 \\ iv_1 = v_2 \end{cases}$$

Les deux équations sont identiques. On choisit $v_1 = 1$ et $v_2 = i$

$$\implies \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre normalisé}$$

Pour le vecteur propre associé à -1 on a :

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} -iv_2 = -v_1 \\ iv_1 = -v_2 \end{cases}$$

On choisit $v_1 = 1$ et $v_2 = -i$

$$\text{Donc } \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \text{ est un vecteur propre normalisé.}$$

Diagonalisation de σ_z .

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ dans la base } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Donc 1 est la valeur propre associée à $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et -1 est la valeur propre associée à $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Trace. La trace d'une matrice est égale à la somme des éléments diagonaux. Celle-ci est aussi égale à la somme des valeurs propres. On vérifie que tout est consistant et que $\text{Tr } \sigma_x = \text{Tr } \sigma_y = \text{Tr } \sigma_z = 0$.

Déterminant. Le déterminant est égal à $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Mais c'est aussi le produit des valeurs propres. On vérifie que tout est consistant et que $\det \sigma_x = \det \sigma_y = \det \sigma_z = -1$.

6. En notation de Dirac on a :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} |\uparrow\rangle \langle\uparrow| + a_{12} |\uparrow\rangle \langle\downarrow| + a_{21} |\downarrow\rangle \langle\uparrow| + a_{22} |\downarrow\rangle \langle\downarrow|.$$

En fait, il est utile de réaliser que ceci est consistant avec

$$\langle\uparrow|A|\uparrow\rangle = a_{11}; \langle\uparrow|A|\downarrow\rangle = a_{12}; \langle\downarrow|A|\uparrow\rangle = a_{21} \text{ et } \langle\downarrow|A|\downarrow\rangle = a_{22}.$$

D'autre part

$$|\uparrow\rangle \langle\uparrow| = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; |\uparrow\rangle \langle\downarrow| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; |\downarrow\rangle \langle\uparrow| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } |\downarrow\rangle \langle\downarrow| = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Maintenant la vérification demandée est triviale. Le problème aux valeurs propres en notation de Dirac s'écrit :

$$A|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$

ou bien

$$(a_{11}|\uparrow\rangle \langle\uparrow| + a_{12}|\uparrow\rangle \langle\downarrow| + a_{21}|\downarrow\rangle \langle\uparrow| + a_{22}|\downarrow\rangle \langle\downarrow|)(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) = \lambda\alpha|\uparrow\rangle + \lambda\beta|\downarrow\rangle$$

$$\begin{cases} \alpha a_{11}|\uparrow\rangle + \alpha a_{21}|\downarrow\rangle + \beta a_{12}|\uparrow\rangle + \beta a_{22}|\downarrow\rangle = \lambda\alpha|\uparrow\rangle + \lambda\beta|\downarrow\rangle \\ (\alpha a_{11} + \beta a_{12})|\uparrow\rangle + (\alpha a_{21} + \beta a_{22})|\downarrow\rangle = \lambda\alpha|\uparrow\rangle + \lambda\beta|\downarrow\rangle \end{cases}$$

Cela signifie :

$$\begin{cases} \alpha a_{11} + \beta a_{12} = \lambda\alpha \\ \alpha a_{21} + \beta a_{22} = \lambda\beta \end{cases}$$

Ce qui est bien sûr équivalent à la version matricielle

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

ou bien encore

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres sont données par la condition $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ et donc

$$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21} = 0 \text{ etc...}$$

Finalement, il faut encore résoudre cette équation du second degré en λ .