Solution de la série 7
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Codage superdense avec des paires imparfaites.*

(a) Suppose that we can find two states with

$$|B_\theta\rangle = (a_1 |0\rangle + b_1 |1\rangle) \otimes (a_2 |0\rangle + b_2 |1\rangle).$$

Then, we have $\cos(\theta) = a_1 a_2$ and $\sin(\theta) = b_1 b_2$ and $a_1 b_2 = 0$ and $b_1 a_2 = 0$. Since $a_1 b_2 = 0$ then $a_1 = 0$ or $b_2 = 0$. If $a_1 = 0$, we have $\cos(\theta) = 0 \to \theta = \frac{\pi}{2}$. If $b_2 = 0$ then $\sin(\theta) = 0 \to \theta = 0$. Since $b_1 a_2 = 0$ then $b_1 = 0$ or $a_2 = 0$. We arrive at the same conclusion. Thus only when $\theta = 0$ or $\theta = \frac{\pi}{2}$ can we write $|B_\theta\rangle$ as a product state.

(b) The four operations of Alice are

$$\begin{aligned}
I_1 \otimes I_2 |B_\theta\rangle &= |B_\theta\rangle = \cos(\theta) |00\rangle + \sin(\theta) |11\rangle, \\
X_1 \otimes I_2 |B_\theta\rangle &= \cos(\theta) |10\rangle + \sin(\theta) |01\rangle, \\
Z_1 \otimes I_2 |B_\theta\rangle &= \cos(\theta) |00\rangle - \sin(\theta) |11\rangle. \\
iY_1 \otimes I_2 |B_\theta\rangle &= \cos(\theta) |10\rangle - \sin(\theta) |01\rangle.
\end{aligned}$$

In the last equality, we use $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $iY = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Alice wants to send 00. Bob receives $|B_\theta\rangle$ because she just sends her photon to Bob. The measurement outcome of Bob are $|B_{00}\rangle, |B_{01}\rangle, |B_{01}\rangle, |B_{11}\rangle$, therefore

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(00) &= |\langle B_{00}| B_\theta\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2} |(\langle 00| + \langle 11|)(\cos(\theta) |00\rangle + \sin(\theta) |11\rangle)|^2 \\
&= \frac{1}{2} (\cos(\theta) + \sin(\theta))^2 \\
&= \frac{1}{2} (\cos^2\theta + \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta) \\
&= \frac{1 + \sin(2\theta)}{2}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(01) &= |\langle B_{01}| B_\theta\rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2} |(\langle 01| + \langle 10|)(\cos(\theta) |00\rangle + \sin(\theta) |11\rangle)|^2 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(10) &= |\left\langle B_{10} \right| B_\theta \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2}|(\langle 00| - \langle 11|)(\cos(\theta)\,|00\rangle + \sin(\theta)\,|11\rangle)|^2 \\
&= \frac{1}{2}(\cos(\theta) - \sin(\theta))^2 \\
&= \frac{1}{2}(\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta) \\
&= \frac{1-\sin(2\theta)}{2}.
\end{aligned}$$

and $\text{Prob}(11) = |\left\langle B_{11} \right| B_\theta \rangle|^2 = 0$. The messages observed by Bob are 00 or 10 with probabilities $\frac{1+\sin(2\theta)}{2}$ and $\frac{1-\sin(2\theta)}{2}$. Thus, the probability of error is $\text{Prob}(10) = \frac{1-\sin(2\theta)}{2}$.
It is minimal if $\sin(2\theta) = 1 \to \theta = \frac{\pi}{4}$. So if $\left|B_{\theta=\frac{\pi}{4}}\right\rangle$ is a Bell state $|B_{00}\rangle$.
It is maximal if $\sin(2\theta)$ is minimal in $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$. That is the case if $\theta = 0$, i.e., $\text{Prob}(10) = \frac{1}{2}$ and $|B_{\theta=0}\rangle = |00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle$ a product state.

Exercice 2 *Entanglement swapping*

L'état des quatres particules avant la mesure est

$$|\Psi\rangle = |B_{00}\rangle_{12} \otimes |B_{00}\rangle_{34}$$

Les particules 2 et 3 sont dans le labo de Charlie qui fait une mesure dans la base de Bell. Cette base est constituée des vecteurs $|B_{00}\rangle_{23}, |B_{01}\rangle_{23}, |B_{10}\rangle_{23}, |B_{11}\rangle_{23}$. Les projecteurs associés sont donc (projecteur = ket-bra = vecteur colonne fois vecteur ligne) :

$$|B_{00}\rangle_{23}\langle B_{00}|_{23}, \qquad |B_{01}\rangle_{23}\langle B_{01}|_{23}, \qquad |B_{10}\rangle_{23}\langle B_{10}|_{23}, \qquad |B_{11}\rangle_{23}\langle B_{11}|_{23}$$

Puisque Alice (qui possède la particule 1) et Bob (qui possède la particule 2) ne font aucunne opération, le postulat de la mesure nous dit que l'état $|\Psi\rangle$ est projeté aléatoirement par un des projecteurs suivants :

$$\begin{aligned}
P_{00} &= I_1 \otimes |B_{00}\rangle_{23}\langle B_{00}|_{23} \otimes I_4, \\
P_{01} &= I_1 \otimes |B_{01}\rangle_{23}\langle B_{01}|_{23} \otimes I_4, \\
P_{10} &= I_1 \otimes |B_{10}\rangle_{23}\langle B_{10}|_{23} \otimes I_4, \\
P_{11} &= I_1 \otimes |B_{11}\rangle_{23}\langle B_{11}|_{23} \otimes I_4.
\end{aligned} \tag{1}$$

Supposons que létat est projeté par P_{00} et faisons le calcul de létat résultant après la mesure :

$$P_{00}|\Psi\rangle = (I_1 \otimes |B_{00}\rangle_{23}\langle B_{00}|_{23} \otimes I_4)(|B_{00}\rangle_{12} \otimes |B_{00}\rangle_{34})$$

Le résultat final contient le vecteur $|B_{00}\rangle_{23}$ qui est un état intriqué chez Charlie. Pour le reste nous calculons

$$\begin{aligned}
\langle B_{00}|_{23}|B_{00}\rangle_{12}|B_{00}\rangle_{34} &= \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\Big(\langle 0|_2\langle 0|_3 + \langle 1|_2\langle 1|_3\Big)\Big(|0\rangle_1|0\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 + |0\rangle_1|0\rangle_2|1\rangle_3|1\rangle_4 \\
&\qquad + |1\rangle_1|1\rangle_2|0\rangle_3|0\rangle_4 + |1\rangle_1|1\rangle_2|1\rangle_3|1\rangle_4\Big) \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\Big(|0\rangle_1 \otimes |0\rangle_4 + |1\rangle_1 \otimes |1\rangle_4\Big) \\
&= \frac{1}{2}|B_{00}\rangle_{14}
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
P_{00}|\Psi\rangle &= |B_{00}\rangle_{23}\langle B_{00}|_{23}|B_{00}\rangle_{12}|B_{00}\rangle_{34} \\
&= \frac{1}{2}|B_{00}\rangle_{23} \otimes |B_{00}\rangle_{14}
\end{aligned} \tag{2}$$

L'état final normalisé après la mesure est

$$|B_{00}\rangle_{23} \otimes |B_{00}\rangle_{14}$$

Ainsi Charlie possède maintenant un état intriqué et Alice et Bob aussi ! La probabilité d'obtenir cet état est juste 1/4. Pour obtenir ce résultat on calcule la probabilité (voir remarque ci-dessous) :

$$\begin{aligned}
\langle \Psi|P_{00}|\Psi\rangle &= \langle \Psi|P_{00}P_{00}|\Psi\rangle \\
&= \frac{1}{4}\Big(\langle B_{00}|_{23} \otimes \langle B_{00}|_{14}\Big)\Big(|B_{00}\rangle_{23} \otimes |B_{00}\rangle_{14}\Big) \\
&= \frac{1}{4}\langle B_{00}|_{23}|B_{00}\rangle_{23}\langle B_{00}|_{14}|B_{00}\rangle_{14} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned} \tag{3}$$

Les autres états possible sont

$$|B_{01}\rangle_{23} \otimes |B_{01}\rangle_{14}, \qquad |B_{10}\rangle_{23} \otimes |B_{10}\rangle_{14}, \qquad |B_{11}\rangle_{23} \otimes |B_{11}\rangle_{14}\,.$$

Remarque sur le postulat de la mesure : Si l'état avant la mesure est $|\Psi_{\text{in}}\rangle$ et l'état obtenu après la mesure est $|\Psi_{\text{fin}}\rangle$ la probabilité de cet évènement est

$$|\langle \Psi_{\text{fin}}|\Psi_{\text{in}}\rangle|^2$$

Cette probabilité est égale à $\langle \Psi_{\text{fin}}|\Psi_{\text{in}}\rangle\langle \Psi_{\text{in}}|\Psi_{\text{fin}}\rangle$. Posant $P_{\text{fin}} = |\Psi_{\text{fin}}\rangle\langle \Psi_{\text{fin}}|$ qui le projecteur sur l'état final on trouve que la probabilité peux aussi s'écrire

$$\langle \Psi_{\text{in}}|P_{\text{fin}}|\Psi_{\text{in}}\rangle$$

Et aussi puisque $P_{\text{fin}}^2 = P_{\text{fin}}$ pour un projecteur cette probabilité est aussi égale à

$$\langle \Psi_{\text{in}}|P_{\text{fin}}P_{\text{fin}}|\Psi_{\text{in}}\rangle$$

Grâce à cette formula on trouve que la probabilité plus haut est 1/4 sans faire de calculs !