Solution de la série 3
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Mesures de la Polarisation*

1. L'état initial du système est
$$|\Psi\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle\,.$$
Les deux états possible après la mesure sont
$$|\alpha\rangle = \cos\alpha\,|x\rangle + \sin\alpha\,|y\rangle\,, \qquad |\alpha_\perp\rangle = \cos\alpha_\perp\,|x\rangle + \sin\alpha_\perp\,|y\rangle$$
Notez que $\alpha_\perp = \alpha + \frac{\pi}{2}$ et $\cos\alpha_\perp = -\sin\alpha$, $\sin\alpha_\perp = \cos\alpha$. La probabilité de détecter $|\alpha\rangle$ est
$$\begin{aligned}\text{Prob}\,(p_\alpha = +1) &= |\langle\alpha\,|\Psi\rangle\,|^2 \\ &= |\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha|^2 \\ &= (\cos(\theta-\alpha))^2\end{aligned}$$
La probabilité de détecter $|\alpha_\perp\rangle$ est
$$\begin{aligned}\text{Prob}\,(p_\alpha = -1) &= |\langle\alpha_\perp\,|\Psi\rangle\,|^2 \\ &= |\cos\theta\cos\alpha_\perp + \sin\theta\sin\alpha_\perp|^2 \\ &= (\cos(\theta-\alpha_\perp))^2 \\ &= (\sin(\theta-\alpha))^2\end{aligned}$$
Notez que la somme des deux probabilités vaut bien 1.
2. Pour l'analyseur avec un angle α, l'espérance de la variable aléatoire p_α est :
$$\begin{aligned}\text{Exp}\,[p_\alpha] &= +1\cdot\text{Prob}\,(p_\alpha = +1) + (-1)\,\text{Prob}\,(p_\alpha = -1) \\ &= 2\,\text{Prob}\,(p_\alpha = +1) - 1 \\ &= 2(\cos(\theta-\alpha))^2 - 1 \\ &= \cos(2(\theta-\alpha))\end{aligned}$$
et sa variance
$$\begin{aligned}\text{Var}\,[p_\alpha] &= \text{Exp}\left[p_\alpha^2\right] - (\text{Exp}\,[p_\alpha])^2 \\ &= 1 - (\text{Exp}\,[p_\alpha])^2 \\ &= 4\,\text{Prob}\,(p_\alpha = +1)\,(1 - \text{Prob}\,(p_\alpha = +1)) \\ &= (\sin 2(\theta-\alpha))^2\end{aligned}$$
Notez que pour un état initial avec $\theta = \alpha$ on obtient une espérance $+1$ avec une variance nulle ; et pour un état initial $\theta = \alpha_\perp$ on obtient une espérance -1 avec une variance nulle. Dans ces deux cas le résultat de la mesure est déterministe. Dans tous autres cas le résultat est aléatoire avec une variance non nulle.
3. Vérifions maintenant que l'on obtient les mêmes formules pour les moyennes et variance de l'observable P_α. Ici nous montrons le calcul en notation de Dirac (se référer au cours pour l'écriture en composante des matrices P_α).

Tout d'abord,

$$\begin{aligned}
\langle\Psi| P_\alpha |\Psi\rangle &= \langle\Psi |\alpha\rangle \langle\alpha |\Psi\rangle - \langle\Psi |\alpha_\perp\rangle \langle\alpha_\perp |\Psi\rangle \\
&= |\langle\alpha |\Psi\rangle|^2 - |\langle\alpha_\perp |\Psi\rangle|^2 \\
&= \cos^2(\theta-\alpha) - \sin^2(\theta-\alpha) \\
&= \cos(2(\theta-\alpha)) \\
&= \mathrm{Exp}\,[p_\alpha]
\end{aligned}$$

Donc $\langle\Psi| P_\alpha |\Psi\rangle$ n'est rien d'autre que l'espérance.
Ensuite, notez aussi que $P_\alpha^2 = (|\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|)(|\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|)$. En développant et en utilisant que $\langle\alpha|\alpha\rangle = \langle\alpha_\perp|\alpha_\perp\rangle = 1$, $\langle\alpha|\alpha_\perp\rangle = \langle\alpha_\perp|\alpha\rangle = 0$ on obtient

$$P_\alpha^2 = |\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|$$

et donc

$$\langle\Psi| P_\alpha^2 |\Psi\rangle = \cos^2(\theta-\alpha) + \sin^2(\theta-\alpha) = 1$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\langle\Psi| P_\alpha^2 |\Psi\rangle - \langle\Psi| P_\alpha |\Psi\rangle^2 &= 1 - (\mathrm{Exp}\,[p_\alpha])^2 \\
&= (\sin 2(\theta-\alpha))^2 \\
&= \mathrm{Var}\,[p_\alpha]
\end{aligned}$$

Remarque : notez que nous aurions pu faire la fin du calcul un peu plus rapidement en notant que $P_\alpha^2 = |\alpha\rangle\langle\alpha| + |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| = I$ où I est la matrice identité 2×2.

4. *Dans le cas (i)* on mesure d'abord P_α et la probabilité d'obtenir $p_\alpha = +1$ (par exemple) est $\cos^2(\theta-\alpha)$. Juste après cette mesure l'état est $|\alpha\rangle$. Ensuite on mesure P_β : la probablité d'obtenir $p_\beta = +1$ (par exemple) est $|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = \cos^2(\beta-\alpha)$. Ainsi

$$\mathrm{Prob}(p_\alpha = +1 \text{ avant}, p_\beta = +1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\alpha)\cos^2(\beta-\alpha)$$

De même,

$$\mathrm{Prob}(p_\alpha = +1 \text{ avant}, p_\beta = -1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\alpha)\sin^2(\beta-\alpha)$$

Aussi,

$$\mathrm{Prob}(p_\alpha = -1 \text{ avant}, p_\beta = +1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\alpha_\perp)\cos^2(\beta-\alpha_\perp) = \sin^2(\theta-\alpha)\sin^2(\beta-\alpha)$$

$$\mathrm{Prob}(p_\alpha = -1 \text{ avant}, p_\beta = -1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\alpha_\perp)\sin^2(\beta-\alpha_\perp) = \sin^2(\theta-\alpha)\cos^2(\beta-\alpha)$$

On vérifie que ces quatres probabilités se somment bien à 1 (consistence).

Dans le cas (ii) on mesure d'abord P_β et la probabilité d'obtenir $p_\beta = +1$ (par exemple) est $\cos^2(\theta-\beta)$. Juste après cette mesure l'état est $|\beta\rangle$. Ensuite on mesure P_α : la probablité d'obtenir $p_\alpha = +1$ (par exemple) est $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = \cos^2(\alpha-\beta)$. Ainsi

$$\mathrm{Prob}(p_\beta = +1 \text{ avant}, p_\alpha = +1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\beta)\cos^2(\beta-\alpha)$$

De même,

$$\mathrm{Prob}(p_\beta = +1 \text{ avant}, p_\alpha = -1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\beta)\sin^2(\beta-\alpha)$$

et

$$\mathrm{Prob}(p_\beta = -1 \text{ avant}, p_\alpha = +1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\beta_\perp)\cos^2(\beta-\alpha_\perp) = \sin^2(\theta-\beta)\sin^2(\beta-\alpha)$$

$$\mathrm{Prob}(p_\beta = -1 \text{ avant}, p_\alpha = -1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\beta_\perp)\sin^2(\beta-\alpha_\perp) = \sin^2(\theta-\beta)\cos^2(\beta-\alpha)$$

On vérifie que ces quatres probabilités se somment à 1 (consistence).

Discussion : On voit dans cet exercice que l'ordre dans lequel les mesures sont faites a une importance : les mesures de P_α et P_β ne commutent pas. D'autre part la mesure simultanée de P_α et P_β n'a pas de sens. Pour chacunne de ces mesures il faut un appareil de mesure différend et l'ordre des mesures compte même si l'intervalle de temps entre les deux mesures est infinésimal. Nous verrons qu'en mécanique quantique ceci est le cas lorsque les matrices des observables ne commutent pas, c'est à dire $P_\alpha P_\beta - P_\beta P_\alpha \neq 0$.

Exercice 2 *Sphère de Bloch et matrices de Pauli.*

1. Voir la sphère de Bloch dans les notes de cours Chapitre 2, sectio 2.10.
2. Les kets $|\theta, \varphi\rangle$ et $|\pi - \theta, \varphi + \pi\rangle$ sont **représentés** par des vecteurs opposés sur la sphère de Bloch. **Néanmoins ils sont orthogonaux dans l'espace de Hilbert $\mathbb{C}^2$ du bit quantique**. En effet leur produit scalaire est (en notation de Dirac) :

$$\begin{aligned}
\langle \pi - \theta, \varphi + \pi | \theta, \varphi\rangle &= \Big(\cos\frac{\theta}{2}\langle 0| + e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\langle 0|\Big)\Big(\cos\frac{\theta-\pi}{2}|0\rangle + e^{i(\varphi+\pi)}\sin\frac{\theta-\pi}{2}|0\rangle\Big) \\
&= \Big(\cos\frac{\theta}{2}\langle 0| + e^{-i\varphi}\sin\frac{\theta}{2}\langle 0|\Big)\Big(-\sin\frac{\theta}{2}|0\rangle - e^{i\varphi}\cos\frac{\theta}{2}|0\rangle\Big) \\
&= -\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

3. Vérifions que $|0\rangle, |1\rangle$ sont des vecteurs propres avec valeurs propres $+1, -1$ de Z :

$$Z|0\rangle = \Big(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\Big)|0\rangle = |0\rangle\langle 0|0\rangle - |1\rangle\langle 1|0\rangle = |0\rangle$$

et

$$Z|0\rangle = \Big(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|\Big)|1\rangle = |0\rangle\langle 0|1\rangle - |1\rangle\langle 1|1\rangle = -|1\rangle$$

De même pour X, posons d'abord $|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm |1\rangle)$, et

$$X|\pm\rangle = \Big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\Big)|+\rangle = |0\rangle\langle 1|+\rangle + |1\rangle\langle 0|+\rangle = |0\rangle(\frac{1}{\sqrt{2}}) + |1\rangle(\frac{1}{\sqrt{2}}) = |+\rangle$$

et

$$X|\pm\rangle = \Big(|0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|\Big)|-\rangle = |0\rangle\langle 1|-\rangle + |1\rangle\langle 0|-\rangle = |0\rangle(-\frac{1}{\sqrt{2}}) + |1\rangle(\frac{1}{\sqrt{2}}) = -|-\rangle$$

Pour Y on pose d'abord $|C_\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle \pm i|1\rangle)$. Notez que $\langle C_\pm| = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0| \mp i\langle 1|)$. Ensuite on procède comme ci-dessus sans faire d'erreurs de signes ... Les valeurs propres sont encore ± 1.

Remarque : les trois matrices de Pauli sont hermitiennes, $A = A^{T,*}$ (ici $A = X, Y, Z$), donc les valeurs propres sont nécessairement réelles. De plus elles satisfont $A^2 = I$ ou I est la matrice identité. Donc si $|v\rangle$ est un vecteur propre de valeur propre λ on a $A|v\rangle = \lambda|v\rangle$ qui implique $A^2|v\rangle = \lambda^2|v\rangle$ qui implique $|v\rangle = \lambda^2|v\rangle$ qui implique $\lambda^2 = 1$ (car $|v\rangle$ est non nul) qui implique $\lambda = \pm 1$.