Solution de la série 2
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Interféromètre de Mach-Zehnder*

1. L'état initial est : $|h\rangle$
   Après le 1^{er} miroir semi-transparent : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + i\,|v\rangle)$.
   Après les deux déphaseurs : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|h\rangle + ie^{i\varphi_2}\,|v\rangle)$.
   Après les miroirs réflichissants : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|v\rangle - ie^{i\varphi_2}\,|h\rangle)$.
   Après $2^{\text{ém}}$ miroir semi-transparent :
   $$\begin{aligned}&\frac{ie^{i\varphi_1}}{2}(i\,|h\rangle + |v\rangle) - \frac{e^{i\varphi_i}}{2}(|h\rangle + i\,|v\rangle)\\ &= \frac{1}{2}[-(e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2})\,|h\rangle + i(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})\,|v\rangle]\\ &= -\frac{e^{i\varphi_1}}{2}[(1 + e^{i\Delta\varphi})\,|h\rangle - i(1 - e^{i\Delta\varphi})\,|v\rangle]\\ &= |\psi_{\text{fin}}\rangle\,,\end{aligned}$$
   avec $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
2. La probabilité de détection en D_1 est
   $$\begin{aligned}\text{prob}(D_1) &= |\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2\\ &= \frac{1}{4}|1 + e^{i\Delta\varphi}|^2\\ &= \frac{1}{4}|e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}}|^2\\ &= \cos^2(\frac{\Delta\varphi}{2}).\end{aligned}$$
   Probabilité de détection en D_2 est $|\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2 = \sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})$. Ces probabilités dépendent seulement de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, donc seules les <u>différences de phases sont mesurables</u> et non pas les "phases absolues ou globales".
3. *Remarque* : si on faisait l'expérience avec des "boules de canon" (des particules dont le comportement est classique) on s'attendrai à obtenir (en supposant que les probabilités d'emprunter les chemins horizontal ou vertical sont égales) $\text{prob}(D_1) = 1/2$. Le résultat pour des photons est donc complètement différent. Par exemple si $\Delta\varphi = 0$ on trouve $\text{prob}(D_1) = 1$ et si $\Delta\varphi = \pi$ on trouve $\text{prob}(D_1) = 0$. En fait ce résultat est en quelque sorte analogue à léxpérience des doubles fentes de Young. Lorsque on observe tous les photons en D_1 et aucun photon en D_2 (pour $\Delta\varphi = 0$) cela est analogue à une d'interférence constructive (maximale) en D_1 et destructive (minimale) en D_1.