Solution de la série 12
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Refocusing*

— Nous pourrions écrire les matrices en composantes et les multiplier. Plus simplement nous pouvons appliquer l'identité sur les vecteurs de base (base computationelle) et montrer que les deux menbres de l'équation donnent le même résultat.

Par exemple pour $|\psi_0\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$, on trouve (utilisant que R_1 flip un spin ; vérifiez !)

$$\begin{aligned}
|\psi_1\rangle &= e^{-i\frac{t}{2}\frac{\mathcal{H}}{\hbar}}|\uparrow\uparrow\rangle = e^{-itJ}|\psi_0\rangle\,,\\
|\psi_2\rangle &= (R_1\otimes I)|\psi_1\rangle = e^{-itJ}|\downarrow\uparrow\rangle\,,\\
|\psi_3\rangle &= e^{-i\frac{t}{2}\frac{\mathcal{H}}{\hbar}}|\psi_2\rangle = e^{-itJ}e^{-i\frac{t}{2}\frac{\mathcal{H}}{\hbar}}|\downarrow\uparrow\rangle = e^{-itJ}e^{itJ}|\downarrow\uparrow\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle\,,\\
|\psi_4\rangle &= (R_1\otimes I)|\psi_3\rangle = (R_1\otimes I)|\downarrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle\,,
\end{aligned}$$

ce qui montre que $|\psi_4\rangle = |\psi_0\rangle = (I_1\otimes I_2)|\psi_0\rangle$. Cette vérification peut se faire de facon similaire pour les autres états de base $|\uparrow\downarrow\rangle\,, |\downarrow\uparrow\rangle\,, |\downarrow\downarrow\rangle$.

— $J << 1$. Donc $\tau = \frac{\pi}{4J} >> \pi$. Les π-pulses de la RMN sont beaucoup plus rapides que l'évolution des spins nucleaires. L'idée est que en injectant deux π-pulses aux instants $\frac{\tau}{2}$ et τ on reforme l'état initial et donc tout se passe comme si les deux spins n'avaient pas évolué.

Exercice 2 *Identité utile pour la réalisation expérimentale de la porte CNOT par RMN*

Remarque : vu que toutes les matrices dans les exponentielles sont ici diagonales il est facile de faire le calcul en composantes et c'est ce qui est présenté ci-dessous (la matrice de Hdamard n'est pas diagonale mais elle ne vient pas dans une exponentielle). Il est tout aussi facile d'appliquer les deux menbres de l'identité sur les états de base comme dans l'exercice précédent.

— $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale donc

$$R_1 = R_2 = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\pi}{4}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

— La porte de Hadamard est comme d'habitude $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

— Pour l'Hamiltonien on a :

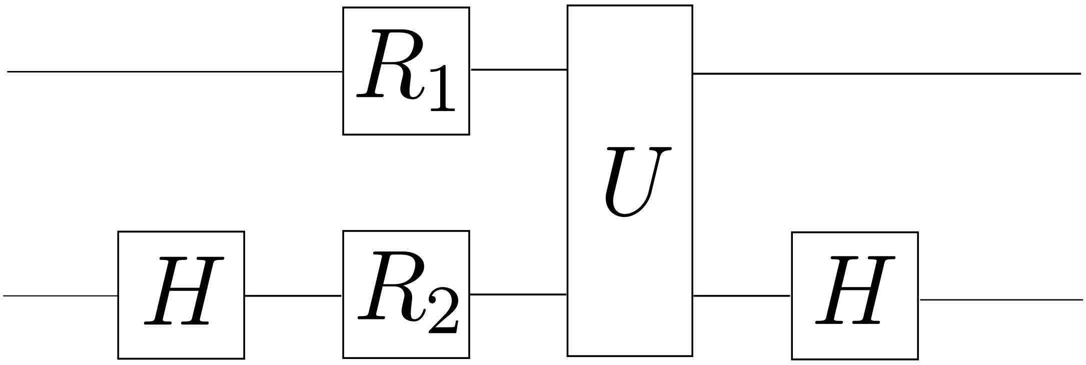
$$\mathcal{H} = \hbar J\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\otimes\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hbar J\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— Si on laisse évoluer pendant un temps $t = \frac{\pi}{4J}$ on trouve

$$U = \exp(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}) = \exp(-\frac{i\pi}{4J\hbar}\mathcal{H}) = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-i\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow U = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right).\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le produit des matrices correspond au circuit suivant :



Sur le dessin l'état $|\psi\rangle$ entre par la gauche et la sortie est à droite
$(I_{2\times 2} \otimes H)U(R_1 \otimes R_2)(I_{2\times 2} \otimes H)|\psi\rangle$.
Calculons le produit :

$$\begin{aligned} R_1 \otimes R_2 &= e^{-i\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U(R_1 \otimes R_2) &= e^{-i\frac{3\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\frac{3\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$I_{2\times 2} \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right),$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right),$$

finalement on trouve

$$(I_{2\times 2}\otimes H)U(R_1\otimes R_2)(I_{2\times 2}\otimes H)=e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Cette matrice est une “sorte de porte CNOT”. Elle est égale à

$$\begin{aligned} & e^{-i\frac{3\pi}{4}}\begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix} \\ & = e^{-i\frac{3\pi}{4}}\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\otimes\sigma_x-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\otimes\mathbb{1}\right\} \\ & = e^{-i\frac{3\pi}{4}}\{|0\rangle\langle 0|\otimes\sigma_x-|1\rangle\langle 1|\otimes\mathbb{1}\}. \end{aligned}$$

Cette operation flip un bit si le bit de controle est dans l'etat $|o\rangle$ et change la phase du bit si le bit de controle est dans l'état $|1\rangle$.

Remarque : Pour obtenir la porte CNOT standard il faut utiliser des rotations avec un autre signe (c.a.d d'angle opposé) :

$$R_1=\exp(+i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1^2}{2}) \text{ et } R_2=\exp(+i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_2^2}{2}).$$

On obtient alors (si on ne fait pas d'erreurs de signes !)

$$\begin{aligned} (I_{2\times 2}\otimes H)U(R_1\otimes R_2)(I_{2\times 2}\otimes H) &= e^{i\frac{3\pi}{4}}\{|0\rangle\langle 0|\otimes\mathbb{1}+|1\rangle\langle 1|\otimes\sigma_x\} \\ &= e^{i\frac{3\pi}{4}}\underbrace{\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)}_{\text{CNOT standard}} \end{aligned}$$