Série 4 : 8 Octobre 2015
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Relation d'incertitude de Heisenberg*

Le but de cet exercice est de prouver l'inégalité de Heisenberg de deux manières différentes.

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[A,B]|\psi\rangle|.$$

Voir les notes de cours pour la définition de ΔA, ΔB et $[A,B]$. Ici A et B sont hermitiennes. Tout d'abord considérez les obserables de moyenne nulle (pourquoi est elle nulle ?) $A' = A - \langle\psi|A|\psi\rangle$ et $B' = B - \langle\psi|B|\psi\rangle$. Montrez d'abord que l'inégalité est equivalente à

$$(\Delta A')(\Delta B') \geq \frac{1}{2}|\langle\psi|[A',B']|\psi\rangle|.$$

On va maintenant montrer cette dernière.

1. *Première méthode.* Considérez le vecteur $|\psi_\lambda\rangle \equiv (A+i\lambda B)|\psi\rangle$. Montrez que sa norme au carré est un polynome du second degré en λ. Ce polynome doit être positif pour tout λ : pourquoi ? En déduire l'inégalité de Heisenberg.
2. *Deuxième méthode.* Considérez le membre de droite de l'inégalité de Heisenberg. Si vous développez le commutateur, puis utilisez l'inégalité $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ (valable pour tout $a, b \in \mathbb{R}$). Vous obtenez deux termes. Appliquez de manière appropriée l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour en déduire l'inégalité de Heisenberg. Remarque : en fait la première méthode de preuve est plus satisfaisante car elle "contient" la preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. *Application.* Soit $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + i|1\rangle)$, et $A = X$, $B = Z$ (ces matrices sont données dans la série précédente). Calculez le commutateur $[X,Z]$, puis appliquez l'inégalité de Heisenberg. Interprétez les matrices X et Z en tant qu'observable de polarisation de photons : à quels analyseurs correspondent-elles ?

4. *Facultatif.* Cette question est un complément au cours. Considérez l'espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(\mathbf{R})$ pour une particule dans l'espace à une dimension spatiale. Les états sont des fonctions d'ondes $\psi(x)$ normalisdes (donc de carré integrable) c'est à dire $\int_{-\infty}^{+\infty} dx\, |\psi(x)|^2 = 1$. L'observable position est l' opérateur de multiplication $\hat{x}$ defini par $(\hat{x}\psi)(x) = x\psi(x)$ et l'observable impulsion (quantité de mouvement) $\hat{p}$ est définie comme $(\hat{p}\psi)(x) = -i\hbar\frac{d}{dx}\psi(x)$. Montrez

   $$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

   Indication : considérez $[\hat{x},\hat{p}]\psi(x)$. Ecrivez et interprétez la relation d'incertitude de Heisenberg.