

**Exercice 1** *Refocusing*

Considérez un Hmailtonien de type Heisenberg anisotrope (uniquement le terme “z” intervient).

$$\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$$

pour l'interaction de deux qubits. Soit

$$R_1 = \exp\left(i\pi \frac{\sigma_1^x}{2}\right),$$

le  $\pi$ -pulse (ou bien rotation autour de  $x$ ) agissant sur le premier spin. Cette opération est une opération à un qubit et peut être réalisée par des techniques de RMN comme vu au cours (champ constant plus champ tournant).

On considère l'évolution des deux spins pendant un temps  $\frac{t}{2}$ , suivi d'un  $\pi$ -pulse, suivi de l'évolution pendant un temps  $\frac{t}{2}$ , et suivi à nouveau d'un  $\pi$ -pulse. L'évolution totale est

$$U_{tot} = (R_1 \otimes \mathbb{I}_2) e^{-i\frac{t}{2}\frac{\mathcal{H}}{\hbar}} (R_1 \otimes \mathbb{I}_2) e^{-i\frac{t}{2}\frac{\mathcal{H}}{\hbar}}$$

1. Montrez maintenant l'identité générale valable pour tout  $t$  :

$$(R_1 \otimes \mathbb{I}_2) e^{-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}} (R_1 \otimes \mathbb{I}_2) e^{-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}} = \mathbb{I}_1 \otimes \mathbb{I}_2$$

2. En pratique  $J \ll 1$ . Cela entraîne une interprétation physique de cette identité. Pouvez-vous en dire quelques mots ?

**Exercice 2** *Identité utile pour la réalisation expérimentale de la porte CNOT par RMN*

Dans cet exercice nous prouvons une identité utile à la réalisation expérimentale de la porte CNOT qui est aussi discutée en cours. On considère deux qubits (par exemple : spins 1/2, systèmes à deux niveaux) et les opérateurs suivants :

- Rotations d'angle  $\frac{\pi}{2}$  autour de l'axe  $z$  pour chaque spin

$$R_1 = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1^z}{2}\right) \text{ et } R_2 = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_2^z}{2}\right)$$

- Porte de Hadamard H.

- L'opérateur d'évolution  $U = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}\right)$  associé à l'hamiltonien d'interaction de Heisenberg anisotrope pour deux spins

$$\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z.$$

On laisse évoluer le système pendant un temps  $t = \frac{\pi}{4J}$ .

1. Dessinez le circuit correspondant au produit des matrices

$$(I_{2 \times 2} \otimes H) U (R_1 \otimes R_2) (I_{2 \times 2} \otimes H)$$

2. Calculez ce produit et montrez qu'il est égal à une matrice  $4 \times 4$  équivalente à la porte CNOT.