Série 11 : 26 Novembre 2015
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Hamiltonien de Heisenberg et intrication de l'état fondamental.*

Rappel : Nous avons vu que l'énergie d'interaction d'un moment magnétique $\vec{M}$ avec un champ magnétique $\vec{B}$ est donnée par$H = -\vec{B} \cdot \vec{M}$. La différence entre cette quantité et son minimum est l'énergie qu'il faut fournir pour faire dévier une boussole de son état d'équilibre.

Interaction entre deux moments magnétiques : Prenons maintenant deux moments magnétiques et supposons pour le moment qu'il n'y a aucun champ magnétique externe. Leur énergie d'interaction est proportionnelle à $\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2$. Le minimum est atteint pour la configuration d'équilibre qui correspond à prendre $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ opposés. Notez que $\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2$ est la fonction la plus simple des deux vecteurs $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ qui soit invariante sous les rotations.

En M.Q. pour deux spins 1/2 on a $\vec{M}_1 = g_1 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_1$ et $\vec{M}_2 = g_2 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_2$. On posera donc pour l'hamiltonien d'interaction

$$H = \hbar J \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

C'est l'hamiltonien de Heisenberg, L'espace de Hilbert des deux spins (ou deux q-bits !) est $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ et la formule ci-dessus signifie en fait

$$H = \hbar J \left(\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \right)$$

L'hamiltonien de Heisenberg est donc une matrice 4×4.

(a) Écrire la matrice 4×4 explicitement.

(b) Montrez que

$$H = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + 2\hbar J \left(\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+ \right)$$

(c) Poser $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et vérifiez les relations

$$\begin{array}{ll} \sigma_z |\uparrow\rangle = |\uparrow\rangle & \sigma_z |\downarrow\rangle = -|\downarrow\rangle \\ \sigma_+ |\uparrow\rangle = 0 & \sigma_+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \\ \sigma_- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle & \sigma_- |\downarrow\rangle = 0 \end{array}$$

Pour cette raison on appelle souvent σ_+ et σ_- les "raising and lowering operators".

(d) Analysez l'action de H sur l'état dit "singulet"

$$|\psi_{0,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right)$$

et sur les états "triplets"

$$|\psi_{1,1}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle, \qquad |\psi_{1,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \right), \qquad |\psi_{1,-1}\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$$

En déduire les niveaux d'énergie (ou valeurs propres) de H et les placer sur un axe (vertical).

(e) On ajoute maintenant un champ magnétique extérieur $\vec{B} = (0, 0, B)$. L'hamiltonien total est maintenant

$$H = -\frac{g\hbar}{2}\vec{B} \cdot \vec{\sigma}_1 - \frac{g\hbar}{2}\vec{B} \cdot \vec{\sigma}_2 + \hbar J \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$

Ecrire la matrice 4×4 explicitement. On posera $g\hbar B = \hbar\omega_0$. En utilisant directement d) donnez les valeurs et vecteurs propres et faîtes un graphe des niveaux d'énergie en fonction de ω_0. Comemnt évolue létat de plus basse énergie lorsque ω_0 augmente ?