

Exercice 1 *Rotations sur la sphère de Bloch*

1. Représentez sur la sphère de Bloch les vecteurs propres de σ_x , σ_y et σ_z .
2. Calculez explicitement les matrices $\exp(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x)$, $\exp(-i\frac{\beta}{2}\sigma_y)$, $\exp(-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z)$.
3. Considérez le qubit $|\psi\rangle = (\cos\frac{\theta}{2})|\uparrow\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{\theta}{2})|\downarrow\rangle$. Représentez l'action des matrices $\exp(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x)$ et $\exp(-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z)$ sur ce vecteur.

Exercice 2 *Création d'intrication grâce à une interaction magnétique.*

On considère deux spins $\frac{1}{2}$ nucléaires avec Hamiltonien d'interaction $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$. L'opérateur d'évolution de ce système est $U = \exp(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H})$. Soit

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

l'état initial des deux spins.

1. Montrez que l'état après un temps $\tau = \frac{\pi}{4J}$ est

$$|\psi_\tau\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2} (|\uparrow\uparrow\rangle - i|\uparrow\downarrow\rangle + i|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)$$

2. Montrez que cet état est intriqué, c'est à dire qu'il est impossible de l'écrire sous la forme $(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) \otimes (\gamma|\uparrow\rangle + \delta|\downarrow\rangle)$.