Exercise Set 5 : 24 March 2016
Calcul Quantique

Exercise 1 *Algorithme de Deutsch et Josza le plus simple possible*

Il s'agit d'appliquer la théorie à à ce cas particulier et d'écrire toutes les sommes explicitement.

Exercise 2 *Vérification pour bonne compréhension si besoin est*

(a) Prendre b=0 :

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{c=0}^{1}|c\rangle.$$

Prendre b=1 :

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{c=0}^{1}(-1)^c|c\rangle.$$

Pour $m = 2$:

$$\begin{aligned} H^{\otimes 2}|0_2\rangle = H\otimes H|00\rangle &= H\otimes H|0\rangle\otimes|0\rangle \\ &= H|0\rangle\otimes H|0\rangle \\ &= \frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}}\otimes\frac{|0\rangle+|1\rangle}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{|0\rangle\otimes|0\rangle+|1\rangle\otimes|0\rangle+|0\rangle\otimes|1\rangle+|1\rangle\otimes|1\rangle}{2} \\ &= \frac{1}{(\sqrt{2})^2}(|00\rangle+|10\rangle+|01\rangle+|11\rangle). \end{aligned}$$

Pour $m = 3$ procéder de la même manière.

$$\begin{aligned} H^{\otimes 2}|b_1b_2\rangle &= H|b_1\rangle\otimes|b_2\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{c_1}(-1)^{b_1c_1}|c_1\rangle\otimes\sum_{c_2}(-1)^{b_2c_2}|c_2\rangle \\ &= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\sum_{c_1,c_2}(-1)^{b_1c_1}(-1)^{b_2c_2}|c_1\rangle\otimes|c_2\rangle \\ &= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2\sum_{c_1,c_2}(-1)^{b_1c_1+b_2c_2}|c_1c_2\rangle. \end{aligned}$$

Exercise 3 *Variation sur le problème de Deutsch-Josza*

(a) Le vecteur $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_m)$ possède m composantes, donc il faut m équations du type $f(\underline{x}) = \underline{a}.\underline{x} + b$ pour le déterminer. Donc il faut m valeurs pour $f(\underline{x})$ et il faut poser m questions à l'oracle classique.

(b) En reprenant le circuit quantique de Deutsch-Josza du cours, l' état final de sortie juste avant la mesure est :

$$|\psi_{fin}\rangle = \sum_{c_1,\cdots,c_m} \left\{ \frac{1}{2^m} \sum_{\underline{x}} (-1)^{f(x)} (-1)^{\underline{x}.\underline{c}} \right\} |c_1 \cdots c_m\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle - |1\rangle).$$

Pour $f(\underline{x}) = \underline{a}.\underline{x} \oplus b$ grâce à l'indication :

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{x}} (-1)^{f(x)} (-1)^{\underline{x}.\underline{c}} &= (-1)^b \sum_{\underline{x}} (-1)^{(\underline{a} \oplus \underline{c}).\underline{x}} \\ &= (-1)^b \, 2^m \text{ si } \underline{a} \oplus \underline{c} = 0 \text{ et } = 0 \text{ sinon }. \end{aligned}$$

Ainsi

$$|\psi_{fin}\rangle = (-1)^b \, |a\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Ce résultat est remarquable car avec 1 seule mesure des m premiers qubits au trouve $\underline{a}$ avec probabilité 1 !

Preuve de l' indication :

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{x} \in \mathbb{F}_2^m} (-1)^{\underline{x}.\underline{z}} &= \sum_{x_1,\cdots,x_m} (-1)^{x_1 z_1} (-1)^{x_2 z_2} \cdots (-1)^{x_m z - m} \\ &= (\sum_{x_1} (-1)^{x_1 z_1})(\sum_{x_2} (-1)^{x_2 z_2}) \cdots (\sum_{x_m} (-1)^{x_m z_m}) \\ &= (1 + (-1)^{z_1})(1 + (-1)^{z_2}) \cdots (1 + (-1)^{z_m}). \end{aligned}$$

- Si $(z_1, \cdots, z_m) = (0, \cdots, 0)$ on trouve 2^m.

- Sinon au moins un des $z_i \neq 0$ (et donc ce $z_i = 1$) et puisque $1 + (-1)^{z_i} = 1 + (-1) = 0$ on trouve 0 pour le produit ci-dessus.