Solutions Exercise Set 11 : 19 May 2016
Calcul Quantique

Exercise 1 *Algorithme de Grover pour $N = 4$*

1. On peut toujours trouver la réponse en maximum 3 questions. En effet lors de la 3ème question si on n'a pas encore présenté à l'oracle la bonne entrée, alors on sait que la dernière entrée restante est la bonne. Donc il y a 3 évémements :
— trouver X_0 en 1 question ; prob=$\frac{1}{4}$.
— trouver X_0 en 2 questions ; prob=$\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.
— trouver X_0 en 3 questions ; prob=$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{4}$.
Le nombre moyen de questions est :
$$\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25.$$
2. En regardant la théorie on voit qu'une question suffit !
3. L'entrée $|00\rangle$ est envoyée sur
$$\begin{aligned} &|00\rangle \to |11\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |10\rangle) \\ &\to \frac{1}{2}(|10\rangle - |11\rangle - |10\rangle - |11\rangle) = -|11\rangle \\ &\to -|00\rangle. \end{aligned}$$
l'entrée $|10\rangle$ est envoyée sur
$$\begin{aligned} &|10\rangle \to |01\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle) \\ &\to \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |00\rangle + |01\rangle) = |01\rangle \to |10\rangle. \end{aligned}$$
et on vérifie aussi $|01\rangle \to |01\rangle$ et $|11\rangle \to |11\rangle$.
4. <u>Etapes de l'algorithme :</u> On supposons $X_0 = 00$ sans perte de géneralité.
   (a) État initial $|001\rangle$.
   (b) $H^{\otimes 3}|001\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\big) \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)$.

(c) Après l'oracle :

$$\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big\{|00\rangle \otimes (|f(00)\rangle - |\overline{f(00)}\rangle)$$
$$+ |01\rangle \otimes \big(|f(01)\rangle - |\overline{f(01)}\rangle\big)$$
$$+ |10\rangle \otimes \big(|f(10)\rangle - |\overline{f(10)}\rangle\big)$$
$$+ |11\rangle \otimes \big(|f(11)\rangle - |\overline{f(11)}\rangle\big)\big\}.$$

Puisque $f(00) = 1$ et $f(01) = f(10) = f(11) = 0$ on trouve :

$$\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big\{|00\rangle \otimes (|1\rangle - |0\rangle)$$
$$+ |01\rangle \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)$$
$$+ |10\rangle \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)$$
$$+ |11\rangle \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big\}.$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big\{-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).$$

Notez que la future solution est "marquée par la phase -1". C'est le fameux phénomène de "kick back phase".
Maintenant on applique $H^{\otimes 2}$ au premier registre. Cela donne :

$$\frac{1}{(\sqrt{2})^5}\big\{-|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle$$
$$+ |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle$$
$$+ |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle$$
$$+ |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).$$

On applique le changement de signe conditionnel : uniquement $|00\rangle$ change de signe :

$$\frac{1}{(\sqrt{2})^5}\big\{+|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle$$
$$- |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle$$
$$- |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle$$
$$- |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).$$

Peut-être qu'une bonne idée est de procéder à des simplifications avant de continuer. Cela donne :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{(\sqrt{2})^5}\big\{-2|00\rangle - 2|01\rangle - 2|10\rangle - 2|11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&\qquad = -\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big\{+|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&\qquad = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{H^{\otimes 2}|00\rangle}_{\text{Ô surprise !}}) \otimes (|0\rangle - |1\rangle) = -H^{\otimes 3}(|001\rangle).
\end{aligned}
$$

Maintenant on applique la dernière série de portes de Hadamard $H^{\otimes 3}$. Puisque $H^2 = 1$ on trouve l'état final $-|00\rangle \otimes |1\rangle$. La mesure du premier registre donne $X_0 = 00$ avec probabilité 1.