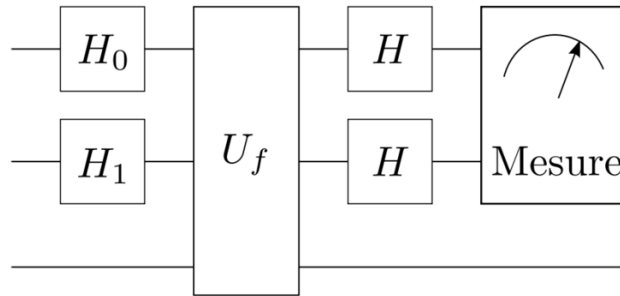

Exercice Set 7 : 14 April 2016
Calcul Quantique

Exercice 1 *Effet des imperfections sur l'algorithme de Simon*

On considère le problème de Simon pour $n = 2$. Soit $H = \{\underline{x} \in \mathbb{F}_2^2 \mid \underline{x} = (0, x_2), \text{ avec } x_2 \in \{0, 1\}\}$. C'est le "sous-espace vectoriel caché" de \mathbb{F}_2^2 . Soit $f : \mathbb{F}_2^2 \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $f(\underline{x}) = f(\underline{y})$ si et seulement si $\underline{x} - \underline{y} \in H$. Pour fixer les idées on prendra la fonction $f(0, 0) = f(0, 1) = 0$ et $f(1, 0) = f(1, 1) = 1$.

Considérez le circuit (de l'algorithme de Simon) :



où H_0 et H_1 sont des portes de Hadamard *imparfaites* :

$$H_0 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-1)^b e^{i\phi_0} |1\rangle)$$

$$H_1 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-1)^b e^{i\phi_1} |1\rangle)$$

et ϕ_0 et ϕ_1 sont des phases dans $[0, 2\pi]$. Les deux dernières portes du circuit sont des portes de Hadamard standard

$$H |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-1)^b |1\rangle)$$

et $U_f |x_1, x_2\rangle \otimes |z\rangle = |x_1, x_2\rangle \otimes |z \oplus f(x_1, x_2)\rangle$. Le circuit est initialisé à $|0, 0\rangle \otimes |0\rangle$.

1. Calculez l'état juste après les deux premières portes de H_0 et H_1 .
2. Calculez l'état après U_f , puis enfin calculez l'état juste après les deux dernières portes de Hadamard (c.à.d. juste avant la mesure).

3. On mesure les deux premiers qu-bits dans la base définie par les projecteurs

$$\left\{ |\underline{y}\rangle \langle \underline{y}| \otimes I \mid \underline{y} \in \{00, 01, 10, 11\} \right\}.$$

Le qu-bit de stockage n'est pas mesuré, ce qui est reflété par la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculez les probabilités d'obtenir les états $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ juste après la mesure.

4. Deducire la probabilité de tomber sur un vecteur de H^\perp et celle de tomber sur un vecteur de H . Pour quelles valeurs de ϕ_0 et ϕ_1 retrouve-t-on les cas où les portes de Hadamard sont parfaites? Y a-t-il quelque chose d'étonnant dans vos résultats?