Discrete Structures EPFL, Fall 2014

Special Problem Set 8 – Midterm Preparation

Date: 7.11.2014 Not graded

Additional training for the midterm. On the following pages you can find the midterm we gave last year.

Rules:

- This exam is closed book. No electronic items are allowed. Place all your personal items on the floor. Leave only a pen and your ID on the desk. If you need extra scratch paper, please ask for it by raising your hand.
- Please do not cheat. We will be forced to report any such occurrence to the president of EPFL. This is not how you want to meet him. :-(
- The exam starts at 8:15am and lasts till 10am.
- If a question is not completely clear to you don't waste time and ask us for clarification right away.
- It is not necessarily expected that you solve all problems. Don't get stuck. Start with the problems which seem the easiest to you and try to collect as many points as you can.
- For each of the following multiple-choice questions there is exactly one correct answer. Mark your answer on the **answer sheet**. The answer sheet is the only thing we will grade. No points will be subtracted for wrong answers.
- You are also asked to provide two proofs. Write your proofs also on the **answer sheet**. One more time: only solutions on the answer sheet count. You can answer in **Français**, **Deutsch**, **English**, **Italiano**, and **Română**.

Règles:

- *Cet examen se déroulera à livre fermé. Aucun appareil électronique n'est autorisé. Déposez toutes vos affaires personnelles sur le sol. Gardez seulement un stylo et votre carte CAMIPRO sur le pupitre. Si vous avez besoin de feuille de brouillon, demandez-en en levant la main.*
- *S'il vous plait, ne trichez pas. Nous serions obligés de rapporter n'importe qu'elle infraction au président de l'EPFL. Ce n'est certainement pas de cette façon que vous souhaitez le rencontrer :-(*
- *L'examen débute à 08:15 précise et se termine à 10:00.*
- *Si une question n'est pas entièrement claire pour vous, ne perdez pas de temps et demandez-nous immédiatement une explication supplémentaire.*
- *Il n'est pas forcément attendu que vous résolviez tous les problèmes. Ne restez pas bloqués! Commencez par les problèmes qui vous paraissent les plus simples et essayez d'obtenir le plus de points possibles.*
- *Pour chaque question à choix multiples, il y a exactement une réponse correcte. Indiquez votre réponse sur la feuille de réponses. Seule, cette feuille de réponses sera notée. Aucun point ne sera soustrait pour les mauvaises réponses.*
- *Il vous sera aussi demandé de produire deux preuves. Écrivez-les aussi sur la feuille de réponses uniquement. Une fois de plus : seules les réponses sur cette feuille seront prises en compte. Vous pouvez répondre en* **Français**, **Deutsch**, **English**, **Italiano**, *et* **Română**.

(scratch paper)

MULTIPLE-CHOICE QUESTIONS – mark your answers on the answer sheet [*QUESTIONS A CHOIX MULTIPLES – marquez vos réponses sur la feuille de réponses*]

1. Let $P(x, y) =$ "$|x| \geq y$". Which of the following propositions is equivalent to the statement "$f(n)$ is $\Omega(n)$"? [*Soit* $P(x, y) =$ "$|x| \geq y$". *Laquelle parmi les propositions suivantes est équivalente à l'énoncé* "$f(n)$ *est* $\Omega(n)$".] **[4pts]**

A. $\forall C > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \ P(f(n), Cn)$
B. $\exists C > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \ P(f(n), Cn)$
C. $\forall C > 0\ \forall n_0\ \forall n \geq n_0\ \ P(f(n), Cn)$
D. $\exists n_0\ \forall n \geq n_0\ \exists C > 0\ \ P(f(n), Cn)$

2. Which of the following expressions is equivalent to $\neg(\forall x\, \forall y\, \exists z\, P(x, y, z) \to Q(x))$? [*Laquelle parmi les expressions suivantes est équivalente à* $\neg(\forall x\, \forall y\, \exists z\, P(x, y, z) \to Q(x))$*?*] **[5pts]**

A. $\forall x\, \forall y\, \exists z\, Q(x) \to P(x, y, z)$
B. $\forall z\, \exists x\, \exists y\, \neg P(x, y, z) \wedge \neg Q(x)$
C. $\exists x\, \exists y\, \forall z\, P(x, y, z) \wedge \neg Q(x)$
D. $\forall x\, \exists y\, \forall z\, P(x, y, z) \wedge \neg Q(x)$
E. $\exists x\, \exists y\, \forall z\, P(x, y, z) \to Q(x)$

3. 194432^4 **mod** 5 equals [194432^4 **mod** 5 *est égal à*] **[5pts]**

A. 0 **B.** 1 **C.** 2 **D.** 3 **E.** 4

4. You are told that for some integer $a \geq 2$, $2^a \not\equiv 2 \pmod{a}$. What can you conclude? [*On vous dit que pour un entier* $a \geq 2$, $2^a \not\equiv 2$ *(mod* a*). Que pouvez-vous en conclure?*] **[3pts]**

A. a is prime [a *est premier*]
B. a is definitely not prime [a *n'est pas premier*]
C. none of the above [*aucune des réponses ci-dessus*]

5. Let $a, b, c, d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Assume that $a \mid b$ and that $c \mid d$. What can you conclude? [*Soient* $a, b, c, d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. *Supposons que* $a \mid b$ *et que* $c \mid d$. *Que pouvez-vous en conclure?*] **[3pts]**

A. $a^c \mid b^d$
B. $ab \mid cd$
C. $a + c \mid b + d$

(scratch paper)

6. Mark each of the following statements T (true) or F (false). [*Marquez chacun des énoncés suivants T (vrai) ou F (faux).*] **[4 x 2 pts]**

i) For any sets A and B and any function $f : A \to B$, if f is injective, then it has an inverse and the inverse is surjective. [*Pour tous ensembles A et B et toute application $f : A \to B$, si f est injective, alors elle a un inverse et l'inverse est surjective.*]

ii) For any set A and any injective functions $f : A \to \mathbb{Z}$ and $g : A \to \mathbb{Z}$, the function $h : A \to \mathbb{Z}$ defined by $h(a) = f(a) + g(a)$ is also injective. [*Pour tout ensemble A et toutes applications injectives $f : A \to \mathbb{Z}$ et $g : A \to \mathbb{Z}$, l'application $h : A \to \mathbb{Z}$ défini par $h(a) = f(a) + g(a)$ est aussi injective.*]

iii) For all sets A and B of the same cardinality, if a function $f : A \to B$ is injective, then it is also bijective. [*Pour tous les ensembles A et B de même cardinalité, si une application $f : A \to B$ est injective, alors elle est aussi bijective.*]

iv) The set of primes and the set of natural numbers have the same cardinality. [*L'ensemble des nombres premiers et l'ensemble des entiers naturels ont la même cardinalité.*]

7. For each of the following sets, mark the correct answer. [*Pour chacun des ensembles suivants, marquez la réponse correcte.*] **[6 x 2 pts]**

A. finite [*fini*] **B.** infinite and countable [*infini et dénombrable*] **C.** uncountable [*non dénombrable*]

i) $\mathbb{Z} \cup \{\sqrt{2}\}$

ii) The set of all functions $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ [*L'ensemble de toutes applications $f : \mathbb{N} \to \{0,1\}$*]

iii) The set of all functions $f : \{0,1\} \to \mathbb{N}$ [*L'ensemble de toutes applications $f : \{0,1\} \to \mathbb{N}$*]

iv) $\{x \in \mathbb{R} : \exists a \; \exists b \; \exists c \in \mathbb{Q} \text{ s.t. } ax^2 + bx + c = 0\}$

v) $\emptyset \times \mathbb{R}$

vi) $\{m \in \mathbb{Z} : \exists k \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } m \cdot k = 42\}$

8. Which of the following sets is NOT a power set of any set? [*Lequel parmi les ensembles suivants n'est l'ensemble des parties d'aucun ensemble?*] **[4pts]**

A. $\{\emptyset\}$ **B.** $\{\{b\}, \emptyset, \{\{b\}\}, \{b, \{b\}\}\}$ **C.** $\{A \subseteq \mathbb{N} : 10^{100} \notin A\}$ **D.** $\emptyset$

9. For each of the following functions, mark the correct answer. Here $\mathbb{Z}_{2014} = \{0, 1, \ldots, 2013\}$. [*Pour chacune des applications suivantes, marquez la réponse correcte. Ici $\mathbb{Z}_{2014} = \{0, 1, \ldots, 2013\}$.*] **[4 x 2 pts]**

A. injective, but not surjective [*injective, mais pas surjective*] **B.** surjective, but not injective [*surjective, mais pas injective*] **C.** bijective [*bijective*] **D.** other [*autre*]

i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $f(x) = x^2$.

ii) $f : \mathbb{Z}_{2014} \to \mathbb{Z}_{2014}$, $f(x) = (x + 30) \textbf{ mod } 2014$.

iii) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$.

iv) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lceil x + 3 \rceil$.

(scratch paper)

10. For $n \geq 1$, define $S(n) = \sum_{j=0}^{n}(1 + j + 2^j)$. Which of the following answers is correct? [*Pour $n \geq 1$, on définit $S(n) = \sum_{j=0}^{n}(1+j+2^j)$. Laquelle parmi les réponses suivantes est correcte?*] **[4pts]**

- **A.** $S(n) = \frac{1}{2}n(n+1) + n + 2^{n+1}$.
- **B.** $S(n) = 2^{n+1} + \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.
- **C.** $S(n) = \frac{1}{2}n(n+1) + 2^{n+1} - 1$.
- **D.** $S(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2) + 2^{n+1} + 1$.

11. Let $f(n) = \sum_{i=0}^{n}(\lceil 32 \sin i \rceil + 73i^3 + 51i^2 \lfloor \log_2(i+2) \rfloor + 1873i)$. What is the best big-O approximation among the following? [*Soit $f(n) = \sum_{i=0}^{n}(\lceil 32 \sin i \rceil + 73i^3 + 51i^2 \lfloor \log_2(i+2) \rfloor + 1873i)$. Quelle est la meilleure approximation big-O parmi les suivantes?*] **[5pts]**

A. $\log_2 n$ **B.** n^2 **C.** n^4 **D.** n^6 **E.** n^8 **F.** e^n

12. Arrange the following functions in a list, so that each of them is big-Ω of the next function. Write on the answer sheet the corresponding list of letters. [*Arrangez les fonctions suivantes en une liste, de telle manière que chaque fonction soit big-Ω de la prochaine. Écrivez sur la feuille de réponses la séquence de lettres correspondante*] **[12pts]**

A. $\frac{1}{\ln(n!)}$ **B.** $\frac{1}{(\lceil \ln n \rceil)!}$ **C.** $\frac{1}{n}$ **D.** $\frac{1}{n(\ln n)^{2013}}$ **E.** $\frac{1}{7^{\sqrt{n}}}$

13. Consider the following algorithm. [*Considérez l'algorithme suivant.*] **[10pts]**

Algorithm

Require: $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$

$m \leftarrow 1$
while $m \leq n$ **do**
    $k \leftarrow n^2$
    while $k \geq 1$ **do**
        $t \leftarrow 1$
        while $t < 3^n$ **do**
            print "All work and no play makes Jack a dull boy."
            $t \leftarrow 3 \cdot t$
        $k \leftarrow k - 1$
    $m \leftarrow 2 \cdot m$

The number of times the algorithm prints "All work and no play makes Jack a dull boy." is [*Le nombre de fois que l'algorithme affiche "All work and no play makes Jack a dull boy." est*]

A. $\Theta(n^2 \log n)$ **B.** $\Theta(n^3 \log n)$ **C.** $\Theta(n^2)$ **D.** $\Theta(n^3)$

(scratch paper)

PROBLEMS – write down the proofs on the answer sheet [*PROBLÈMES – écrivez les démonstrations sur la feuille de réponse*]

14. Let $f_1 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ and $f_2 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ be such that $f_1 = \Theta(f_2)$. Prove the following statements or give a counterexample. [*Soient $f_1 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ et $f_2 : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ telles que $f_1 = \Theta(f_2)$. Démontrez les énoncés suivants ou donnez un contre-exemple.*] **[2 x 10pts]**

1. Let $g_1(x) = (f_1(x))^{-13}$ and $g_2(x) = (f_2(x))^{-13}$. Then, $g_1 = \Theta(g_2)$. [*Soient $g_1(x) = (f_1(x))^{-13}$ et $g_2(x) = (f_2(x))^{-13}$. Alors $g_1 = \Theta(g_2)$.*]
2. Let $g_1(x) = 11^{f_1(x)}$ and $g_2(x) = 11^{f_2(x)}$. Then, $g_1 = \Theta(g_2)$. [*Soient $g_1(x) = 11^{f_1(x)}$ et $g_2(x) = 11^{f_2(x)}$. Alors $g_1 = \Theta(g_2)$.*]

15. Use the Principle of Mathematical Induction to prove that for $n \geq 0$ [*Utilisez le Principe de l'Induction Mathématique pour démontrer que pour $n \geq 0$*] **[10pts]**

$$\sum_{i=0}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(scratch paper)