Solution de la série 7
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Algorithme de Grover pour $N = 4$*

1. On peut toujours trouver la réponse en maximum 3 questions. En effet lors de la 3ème question si on n'a pas encore présenté à l'oracle la bonne entrée, alors on sait que la dernière entrée restante est la bonne. Donc il y a 3 évémements :
   - trouver X_0 en 1 question ; prob$=\frac{1}{4}$.
   - trouver X_0 en 2 questions ; prob$=\frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.
   - trouver X_0 en 3 questions ; prob$=\frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{4}$.

   Le nombre moyen de questions est :
   $$\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25.$$
   En regardant la théorie on voit qu'une question suffit !
   L'entrée $|00\rangle$ est envoyée sur
   $$\begin{aligned} |00\rangle &\to |11\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |10\rangle) \\ &\to \frac{1}{2}(|10\rangle - |11\rangle - |10\rangle - |11\rangle) = -|11\rangle \\ &\to -|00\rangle. \end{aligned}$$
   l'entrée $|10\rangle$ est envoyée sur
   $$\begin{aligned} |10\rangle &\to |01\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle) \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle) \\ &\to \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |00\rangle + |01\rangle) = |01\rangle \to |10\rangle. \end{aligned}$$
   et on vérifie aussi $|01\rangle \to |01\rangle$ et $|11\rangle \to |11\rangle$.
   <u>Etapes de l'algorithme :</u> On supposons $X_0 = 00$ sans perte de géneralité.
   (a) État initial $|001\rangle$.
   (b) $H^{\otimes 3}|001\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\big) \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)$.

(c) Après l'oracle :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big\{&|00\rangle \otimes (|f(00)\rangle - |\overline{f(00)}\rangle)\\ &+ |01\rangle \otimes \big(|f(01)\rangle - |\overline{f(01)}\rangle\big)\\ &+ |10\rangle \otimes \big(|f(10)\rangle - |\overline{f(10)}\rangle\big)\\ &+ |11\rangle \otimes \big(|f(11)\rangle - |\overline{f(11)}\rangle\big)\big\}.\end{aligned}$$

Puisque $f(00) = 1$ et $f(01) = f(10) = f(11) = 0$ on trouve :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big\{&|00\rangle \otimes (|1\rangle - |0\rangle)\\ &+ |01\rangle \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\\ &+ |10\rangle \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\\ &+ |11\rangle \otimes \big(|0\rangle - |1\rangle\big)\big\}.\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big\{-|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).$$

Notez que la future solution est "marquée par la phase -1". C'est le fameux phénomène de "kick back phase".
Maintenant on applique $H^{\otimes 2}$ au premier registre. Cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\sqrt{2})^5}\big\{&-|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\\ &+ |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\\ &+ |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\\ &+ |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).\end{aligned}$$

On applique le changement de signe conditionnel : uniquement $|00\rangle$ change de signe :

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\sqrt{2})^5}\big\{&+|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\\ &- |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle\\ &- |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle\\ &- |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle).\end{aligned}$$

Peut-être qu'une bonne idée est de procéder à des simplifications avant de continuer. Cela donne :

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(\sqrt{2})^5} & \big\{-2|00\rangle - 2|01\rangle - 2|10\rangle - 2|11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&= -\frac{1}{(\sqrt{2})^3}\big\{+|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\big\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}}(\underbrace{H^{\otimes 2}|00\rangle}_{\text{Ô surprise!}}) \otimes (|0\rangle - |1\rangle) = -H^{\otimes 3}(|001\rangle).
\end{aligned}
$$

Maintenant on applique la dernière série de portes de Hadamard $H^{\otimes 3}$. Puisque $H^2 = 1$ on trouve l'état final $-|00\rangle \otimes |1\rangle$. La mesure du premier registre donne $X_0 = 00$ avec probabilité 1.

Exercice 2 *Effet de la décohérence dans l'algorithme de Shor*

1. Après les portes de Hadamard :

$$
\begin{aligned}
\widetilde{H}_0 \otimes \widetilde{H}_1 & \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (|0\rangle + e^{i\varphi_0}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle + e^{i\varphi_0}|10\rangle + e^{i\varphi_1}|01\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|11\rangle) \otimes |00\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle) \otimes |0\rangle
\end{aligned}
$$

2. Après U_f on obtient l'état :

$$
\frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle \otimes |f(0)\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle \otimes |f(1)\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle \otimes |f(2)\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle \otimes |f(3)\rangle)
$$

Puisque $f(x) = f(x+2)$ on a :

$$
\frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle) \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}(e^{i\varphi_1}|1\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle) \otimes |f(1)\rangle
$$

Appliquons la QFT à chaque terme :

$$
\frac{1}{4}\sum_{y=0}^{3}(1 + e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}2y)})|y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{4}\sum_{y=0}^{3}(e^{i(\varphi_1+\frac{\pi}{2}y)} + e^{i(\varphi_0+\varphi_1+\frac{\pi}{2}3y)})|y\rangle \otimes |f(1)\rangle
$$

3. L'état juste après la mesure est :

$$|\psi_{post}\rangle = \frac{1}{4}(1 + e^{i(\varphi_0 + \pi y)})|y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{4} e^{i(\varphi_1 + \frac{\pi}{2} y)}(1 + e^{i(\varphi_0 + \pi y)})|y\rangle \otimes |f(1)\rangle.$$

La probabilité de l'obtenir est donné par sa norme (au carré)

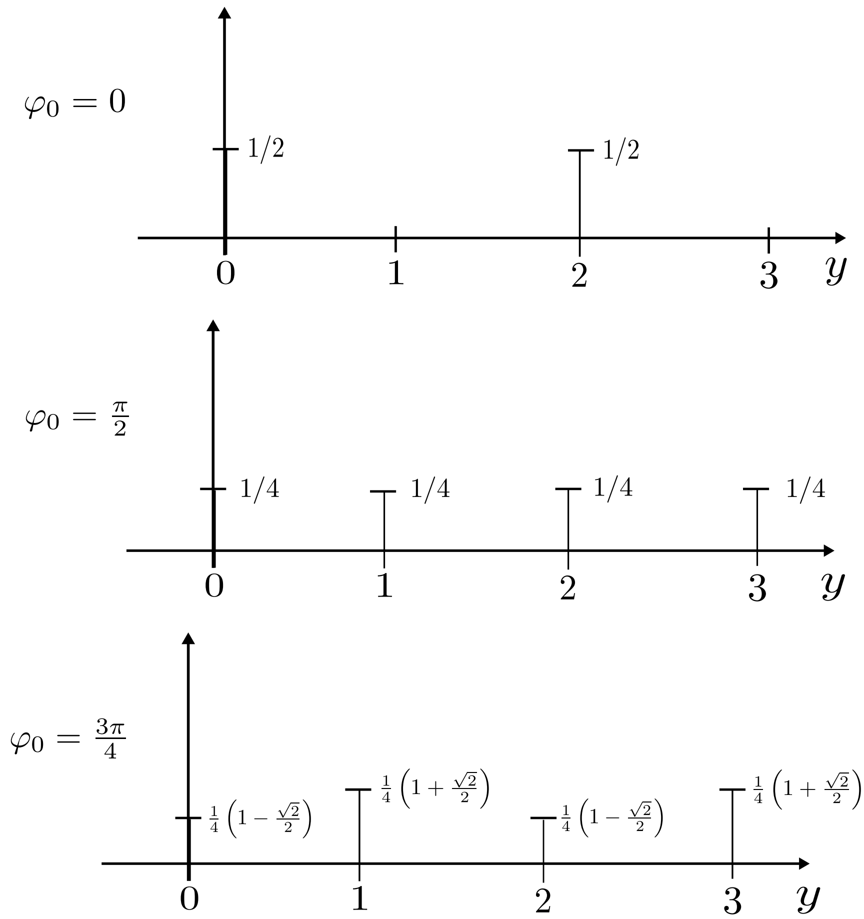
$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(y|\varphi_0, \varphi_1) &= \frac{1}{16}\left\{|1 + e^{i(\varphi_0+\pi y)}|^2 + |1 + e^{i(\varphi_0+\pi y)}|^2\right\} \\ &= \frac{1}{8}\left((1 + \cos(\varphi_0 + \pi y))^2 + \sin^2(\varphi_0 + \pi y)\right)\end{aligned}$$

$\Rightarrow$

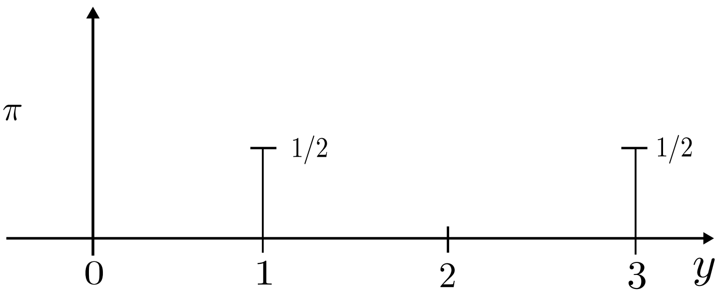
$$\mathrm{Prob}(y|\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{4}\left(1 + \cos(\varphi_0 + \pi y)\right)$$

On voit que curieusement cette probabilité ne depend pas de φ_1. Donc l'algorithme de Shor a l'air robuste par rapport à ce déphasage.

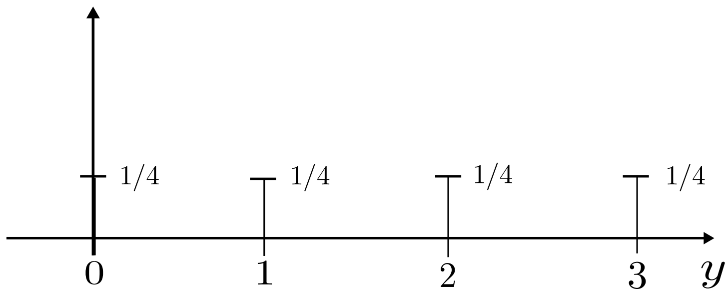
4. Les plots de $\mathrm{Prob}(y)$ pour les différentes valeurs de ϕ_0 sont :



$\varphi_0 = \pi$



$$\mathrm{Prob}(y) = \int \mathrm{d}\varphi_0 \, \mathrm{Prob}(y|\varphi_0) \, \mathrm{Prob}(\varphi_0) = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi_0}{2\pi} \, \mathrm{Prob}(y|\varphi_0) = \frac{1}{4}$$



5. Dans une expérience de RMN on obtient ces spectres. Dans les cas où $\varphi_0 = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ et π on peut lire la période.