Série 1
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Propriétés des matrices de Pauli*

Dans cet exercice nous récoltons des propriétés fondamentales qui sont couramment utilisées. Soit $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ le vecteur formé par les 3 matrices de Pauli :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} ; \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

la matrice identité sera notée $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrez que toute matrice 2×2, A, peut s'écrire comme combinaison linéaire de I et σ_x, σ_y, σ_z :
$$A = a_0 I + a_1 \sigma_x + a_2 \sigma_y + a_3 \sigma_z.$$
On écrit aussi cela sous la forme $A = a_0 I + \vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ où $\vec{a} \cdot \vec{\sigma}$ est le produit scalaire formel entre les vecteurs $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$.
Vérifiez aussi que a_0, a_1, a_2, $a_3 \in \mathbb{R}$ est equivalent à $A = A^\dagger$.
2. Soit $[A, B] = AB - BA$ le commutateur. Vérifiez les identités suivantes :
$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z, \qquad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x, \qquad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y$$
et aussi
$$\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = 0, \qquad \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = 0, \qquad \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z = 0$$
et aussi
$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I, \qquad \sigma_x\sigma_y = i\sigma_z, \qquad \sigma_y\sigma_z = i\sigma_x, \qquad \sigma_z\sigma_x = i\sigma_y$$
3. On définit l'exponentielle d'une matrice A par (pour $t \in \mathbb{R}$)
$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!} = I + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + ...$$
On veut démontrer l'identité utile suivante :
$$e^{it\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = I \cos t + i\vec{n} \cdot \vec{\sigma} \sin t$$

où $\vec{n}$ est un vecteur unité et $t \in \mathbb{R}$. Remarquez que cette identité est une généralisation de l'identité d'Euler :

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$$

Pour démontrer l'identité, montrez d'abord que

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = I$$

Utilisez les développements de Taylor de $\cos t$ et $\sin t$ pour en déduire l'identité voulue.

4. Ecrivez explicitement les matrices 2×2 (sous forme de tableau) suivantes : $\exp(it\vec{n} \cdot \vec{\sigma})$ et $\exp(it\sigma_x)$; $\exp(it\sigma_y)$; $\exp(it\sigma_z)$.
5. Calculez les valeurs propres et vecteurs propres de σ_x, σ_y, σ_z (en composantes). Vérifiez que les valeurs propres satisfont les identités $\operatorname{Tr}\sigma_x = \operatorname{Tr}\sigma_y = \operatorname{Tr}\sigma_z = 0$ et $\det\sigma_x = \det\sigma_y = \det\sigma_z = -1$.
6. On veut faire la même chose que dans le points précédent mais en notation de Dirac. On posera

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Vérifiez que

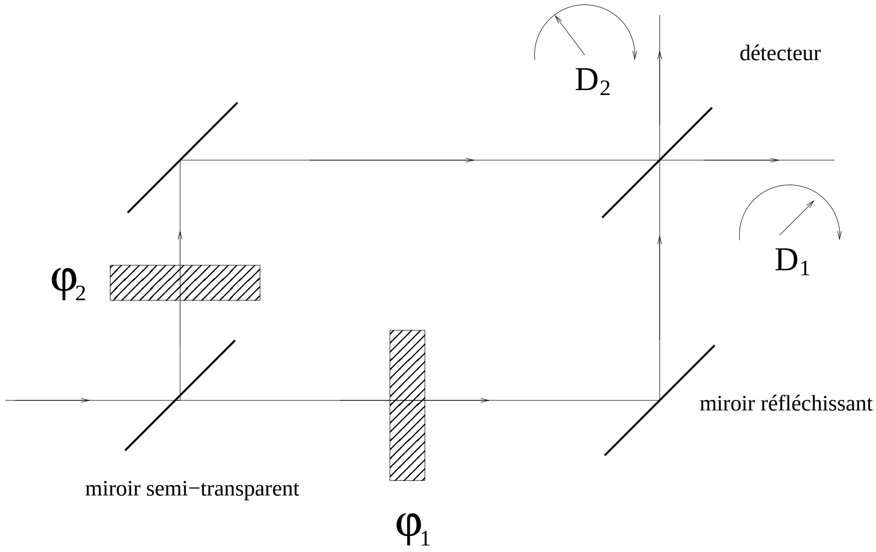
$$\begin{aligned} \sigma_z &= |\uparrow\rangle\langle\uparrow| - |\downarrow\rangle\langle\downarrow| \\ \sigma_x &= |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| \\ \sigma_y &= i\,|\downarrow\rangle\langle\uparrow| - i\,|\uparrow\rangle\langle\downarrow| \end{aligned}$$

Posez $|\psi\rangle = \alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle$ pour α, $\beta \in \mathbb{C}$ et résoudre le problème aux valeurs propres

$$\sigma_i\,|\psi\rangle = \lambda\,|\psi\rangle \text{ pour } i = x, y, z$$

en travaillant avec la notation de Dirac.

Exercice 2 *Interféromètre de Mach-Zehnder*



Une source de photons unique envoie un photon dans l'interféromètre. Le photon passe à travers un miroir semi-transparent, puis est déphasé par les déphaseurs $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$, puis est réfléchi par les miroirs réfléchissants et enfin passe à travers le dernier miroir semi-transparent. Le processus de mesure correspond à une détection dans les photo-détecteurs D_1 et D_2.

On veut calculer la probabilité de détection dans D_1 et D_2 en fonction des déphasages associés à chaque chemin $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$.

On admettra que l'espace de Hilbert du photon est égal à $\mathbb{C}^2 = \{\alpha\,|h\rangle + \beta\,|v\rangle\}$ ou $|h\rangle$ et $|v\rangle$ sont les deux états de la direction de la vitesse "horizontale" et "verticale". On admettra aussi que les miroirs semi-transparents opèrent les transitions suivantes : $|h\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + i|v\rangle)$ et $|v\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(i|h\rangle + |v\rangle)$. Les miroirs réfléchissant opèrent les transitions : $|h\rangle \to i|v\rangle$ et $|v\rangle \to i|h\rangle$.

1. Donnez l'état initial, l'état après le premier miroir semi-transparent, l'état après les déphaseurs, l'état après les miroirs réfléchissants et enfin l'état final après le deuxième miroir semi-transparent (mais avant la mesure).
2. Calculez la probabilité de détection dans D_1 et/ou D_2. Que notez-vous de spécial dans sa dépendance en fonction de φ_1 et φ_2.
3. Donnez le circuit quantique correspondant et rediscuter le calcul du point 1 et 2.