Solution de la série 9
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Refocusing*

L'état final est

$$\begin{aligned} e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}}|\psi_0\rangle &= e^{-itJ\sigma_1^z\otimes\sigma_2^z}\cdot\frac{1}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{-itJ}|\uparrow\uparrow\rangle - e^{itJ}|\uparrow\downarrow\rangle + e^{itJ}|\downarrow\uparrow\rangle - e^{-itJ}|\downarrow\downarrow\rangle\right) \\ &= \frac{e^{-itJ}}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - e^{2itJ}|\uparrow\downarrow\rangle + e^{2itJ}|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right). \end{aligned}$$

1. Pour $t = \frac{\pi}{4J}$ on a $e^{2itJ} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$
   $\Rightarrow |\psi_\tau\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - i\,|\uparrow\downarrow\rangle + i\,|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)$.

2. Supposons que l'état puisse s'écrire
   $(\alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle)\otimes(\gamma\,|\uparrow\rangle + \delta\,|\downarrow\rangle) = \alpha\gamma\,|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha\delta\,|\uparrow\downarrow\rangle + \beta\gamma\,|\downarrow\uparrow\rangle + \beta\delta\,|\downarrow\downarrow\rangle$,
   alors $\alpha\gamma = 1,\ \alpha\delta = -i,\ \beta\gamma = i,\ \beta\delta = -1$.
   On peut toujours poser $\alpha = 1$ (phase globale). Donc $\gamma = 1,\ \delta = -i,\ \beta = i$ et $\delta = i \Rightarrow$ contradiction sur δ.

3. Pour $\frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{8J}$ on a $e^{2itJ} = e^{\frac{i\pi}{4}}$.
   $|\psi_{\tau/2}\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - e^{\frac{i\pi}{4}}\,|\uparrow\downarrow\rangle + e^{\frac{i\pi}{4}}\,|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)$.
   $(R_1\otimes\mathbb{I}_2)\,|\psi_{\tau/2}\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{2}\left(|\downarrow\uparrow\rangle - e^{\frac{i\pi}{4}}\,|\downarrow\downarrow\rangle + e^{\frac{i\pi}{4}}\,|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\right)$
   on laisse evoluer pendant $\tau/2$ à nouveau
   $\rightarrow \frac{1}{2}\left(|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle + |\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle\right)$
   Après une dernière rotation $\rightarrow \frac{1}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)$.
   On remarque que
   $U_{tot}\,|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)\otimes(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)\,|\psi_0\rangle$!

4. $(R_1 \otimes \mathbb{I}_2) = \sigma_1^x \otimes \mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   $e^{-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}} = e^{-itJ\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z} = \begin{pmatrix} e^{-itJ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{itJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{itJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-itJ} \end{pmatrix}$

   Faire la multiplication des matrices.

5. $J << 1$. Donc $\tau = \frac{\pi}{4J} >> \pi$. Les π-pulses sont beaucoup plus rapides que l'évolution des spins nucleaires. L'idée est que en injectant deux π-pulses aux instants $\frac{\tau}{2}$ et τ on reforme l'état initial et donc tout se passe comme si les deux spins n'avaient pas évolué.

Exercice 2 *Realisation de la porte SWAP*

(a) Une façon de montrer l'unitarité est de vérifier que le produit scalaire est préservé. On a :

$$\begin{aligned}\langle x'y'|(\mathrm{SWAP})^{+}\mathrm{SWAP}|x,y\rangle &= \langle y'x'|yx\rangle \\ &= ((\langle y'|\otimes\langle x'|)(|y\rangle\otimes|x\rangle)) \\ &= \langle y'|y\rangle\langle x'|x\rangle \\ &= \langle x'|x\rangle\langle y'|y\rangle \\ &= ((\langle x'|\otimes\langle y'|)(|x\rangle\otimes|y\rangle)) \\ &= \langle x'y'|xy\rangle.\end{aligned}$$

Cela s'étend à n'importe quels états

$$|\phi\rangle = \sum_{x,y} c^{\phi}_{xy}|xy\rangle \text{ et } |\psi\rangle = \sum_{x'y'} c^{\psi}_{x'y'}|x'y'\rangle$$

par linéarité. C'est à dire $\forall|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$,

$$\langle\psi|(\mathrm{SWAP})^{+}\mathrm{SWAP}|\phi\rangle = \langle\psi|\phi\rangle.$$

En prenant la base $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ correspondant à $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}; \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ on trouve la matrice

$$\mathrm{SWAP} = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

(b) La matrice de l'Hamiltonien Heisenberg (voir série 4) est :

$$\hbar J = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

C'est une matrice par blocs, donc d'après l'indication :

$$\exp(-i\frac{t}{\hbar}H) = \left(\begin{array}{c|cc|c} e^{-itJ} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c|}{\exp(-itJ\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & -1\end{pmatrix})} & 0 \\ 0 & & & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & e^{-itJ} \end{array}\right).$$

Calculons le bloc 2×2 :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = -I \times 2\sigma_x.$$

Et I, σ_x commutent donc

$$\exp(-itJ(-I + 2\sigma_x)) = \exp(itJI). \exp(-2itJ\sigma_x)$$
$$\exp(itJI) = \begin{pmatrix} e^{itJ} & 0 \\ 0 & e^{itJ} \end{pmatrix} = e^{itJ} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\exp(-2itJ\sigma_x) = (\cos 2tJ)I - i\sigma_x(\sin 2tJ)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos 2tJ & -i\sin 2tJ \\ -i\sin 2tJ & \cos 2tJ \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$\exp(-itJ\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}) = e^{itJ}\begin{pmatrix} \cos 2tJ & -i\sin 2tJ \\ -i\sin 2tJ & \cos 2tJ \end{pmatrix}.$$

Et l'opérateur d'évolution total de l' Hamiltonien d'Heinsenberg est :

$$\exp(-i\frac{t}{\hbar}H) = \left(\begin{array}{c|cc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & e^{2itJ}\cos 2tJ & -ie^{2itJ}\sin 2tJ & 0 \\ 0 & -ie^{2itJ}\sin 2tJ & e^{2itJ}\cos 2tJ & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Pour $t = \frac{\pi}{4J}$ on trouve

$$\exp(-i\frac{t}{\hbar}H) = e^{-\frac{i\pi}{4}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

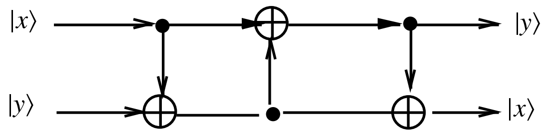
Démonstration des formules utiles :

On vérifie d'abord $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} A^2 & 0 \\ 0 & B^2 \end{pmatrix}$ et pour tout $k \geq 2$: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$. Puis on utilise le développement

$$\exp C = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{C^k}{k!}$$

valable pour des matrices. Tout cela se généralise à un nombre quelconque de blocs.
Pour la formule $\exp(i\alpha\sigma_k) = I\cos\alpha + i\sin\alpha$ on procède en remarquant que

$$\exp((i\alpha\sigma_k) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\alpha)^m}{m!}\sigma_k^m$$



et $\sigma_k^m = \sigma_k$ si m impair ; $\sigma_k^m = I$ si m pair. Les termes impairs donnent $i\sigma_k \sin\alpha$ et les termes pairs donnent $(\cos\alpha)I$.

(c) Le circuit suivant réalise SWAP à partir de CNOT
En détail :

$$
\begin{aligned}
&(\text{CNOT})(\text{CNOT})'(\text{CNOT})|x, y\rangle \\
&= (\text{CNOT})(\text{CNOT})'|x, y \oplus x\rangle \\
&= (\text{CNOT})\,\underbrace{|x \oplus (y \oplus x), y \oplus x\rangle}_{|y, y\oplus x\rangle} \\
&= |y, (y \oplus x) \oplus y\rangle \\
&= |y, x\rangle.
\end{aligned}
$$

Autre méthode de solution pour (b) :

Grâce à la série 4 on sait que l'Hamiltonien de Heisenberg est diagonal dans la base (de ses états propres) des états triplet et singulet.

Triplet : $|\uparrow\uparrow\rangle$; $|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$; $|\downarrow\downarrow\rangle$ ont une énergie $E_1 = \hbar J$. Donc au cours de l'évolution temporelle ils deviennent $e^{-itJ}|\uparrow\uparrow\rangle$; $e^{-itJ}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$; $e^{-itJ}|\downarrow\downarrow\rangle$.

Singulet : $|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$ possède l'énergie $E_0 = -3\hbar J$ donc il évolue comme $e^{3itJ}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$. Pour $t = \frac{\pi}{4J}$ la phase des triplet est $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et celle des singulet est $e^{3i\frac{\pi}{4}} = e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{+i\pi} = (-1)e^{i\frac{-\pi}{4}}$.

Conclusion : A une phase près on voit que $|\uparrow\uparrow\rangle \to |\uparrow\uparrow\rangle$; $|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \to |\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$; $|\downarrow\downarrow\rangle \to |\downarrow\downarrow\rangle$ et $|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \to |\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle$ ce qui est un SWAP dans cette base.