
Série 9
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Refocusing*

On considère deux spins $\frac{1}{2}$ nucléaires avec Hamiltonien d'interaction $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$. L'opérateur d'évolution de ce système est $U = \exp\left(-\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}\right)$.

Soit

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

l'état initial des deux spins.

1. Montrez que l'état après un temps $\tau = \frac{\pi}{4J}$ est

$$|\psi_\tau\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2} (|\uparrow\uparrow\rangle - i|\uparrow\downarrow\rangle + i|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle)$$

2. Montrez que cet état est intriqué, c'est à dire qu'il est impossible de l'écrire sous la forme $(\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle) \otimes (\gamma|\uparrow\rangle + \delta|\downarrow\rangle)$.
3. Soit $R_1 = i \exp\left(-i\pi \frac{\sigma_1^x}{2}\right) = \sigma_1^x$, le π -pulse (ou bien rotation autour de x) agissant sur le premier spin. On considère l'évolution des deux spins pendant un temps $\frac{\tau}{2}$, suivi d'un π -pulse, suivi de l'évolution pendant un temps $\frac{\tau}{2}$, et suivi à nouveau d'un π -pulse. L'évolution totale est

$$U_{tot} = (R_1 \otimes \mathbb{I}_2) e^{-i\frac{\tau}{2} \frac{\mathcal{H}}{\hbar}} (R_1 \otimes \mathbb{I}_2) e^{-i\frac{\tau}{2} \frac{\mathcal{H}}{\hbar}}$$

Calculez $U_{tot} |\psi_0\rangle$: que remarquez-vous ?

4. Montrez maintenant l'identité générale valable pour tout t :

$$(R_1 \otimes \mathbb{I}_2) e^{-\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} (R_1 \otimes \mathbb{I}_2) e^{-\frac{it}{\hbar} \mathcal{H}} = \mathbb{I}_1 \otimes \mathbb{I}_2$$

Conseil : travaillez de façon matricielle.

5. En pratique $J \ll 1$. Cela entraîne une interprétation physique de cette identité. Pouvez-vous en dire quelques mots ?

Exercice 2 Réalisation de la porte SWAP

La porte est importante car elle permet d'échanger les q-bits dans un circuit. Elle est définie dans la base computationnelle par

$$\text{SWAP } |x, y\rangle = |y, x\rangle$$

- a) Démontrez que cette opération est unitaire et donnez sa matrice correspondante.
- b) Nous allons montrer qu'elle peut être réalisée grâce à l'Hamiltonien de Heisenberg

$$H = \hbar J \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

Calculez l'opérateur d'évolution des deux spins

$$U = \exp\left(-i \frac{t}{\hbar} H\right)$$

et montrez que l'on obtient SWAP pour $t_0 = \pi/4J$

Formules utiles :

- Pour une matrice par bloc (à démontrer)

$$\exp\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \exp(A) & 0 \\ \hline 0 & \exp(B) \end{array}\right)$$

- Formule d'Euler généralisée

$$\exp(i\alpha\sigma_k) = I \cos \alpha + i\sigma_k \sin \alpha$$

- c) On peut aussi réaliser SWAP grâce à 3 portes CNOT. Donnez le circuit correspondant.

Remarque : réciproquement on peut réaliser CNOT à partir de $\sqrt{\text{SWAP}}$ et des manipulations à 1 q-bit. Ainsi $\sqrt{\text{SWAP}}$ joue aussi le rôle de porte universelle (mais pas SWAP lui-même).