
Solution de la série 6 Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 Période d'une fonction et factorisation de $N = 15$

(a) On calcule $7^0 = 1 \pmod{15}$, $7^1 = 7 \pmod{15}$, $7^2 = 49 = 19 = 4 \pmod{15}$, $7^3 = 28 = 13 \pmod{15}$ et $7^4 = 91 = 31 = 1 \pmod{15}$. Donc, $\text{Ord}_{15}(7) = 4$.

(b) On vérifie que l'ordre $r = 4$ est pair et que $a^{r/2} \neq -1 \pmod{15}$. En effet $a^{r/2} = 7^2 = 49 = 4 \neq -1 \pmod{15}$ (car $-1 = 14 \pmod{15}$). Donc

$$0 = (7^4 - 1) = (7^2 - 1)(7^2 + 1) \pmod{15}$$

et puisque $7^2 + 1 \neq 0 \pmod{15}$ il faut qu'une partie de 15 divise $7^2 - 1$ et qu'une autre partie de 15 divise $7^2 + 1$. En d'autres termes $\text{PGCD}(7^2 - 1, 15)$ et $\text{PGCD}(7^2 + 1, 15)$ sont non triviaux.

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(7^2 - 1, 15) &= \text{PGCD}(48, 15) = \text{PGCD}(48 - 15, 15) \\ &= \text{PGCD}(48 - 30, 15) = \text{PGCD}(48 - 45, 15) \\ &= \text{PGCD}(3, 15) = 3 \end{aligned}$$

et

$$\text{PGCD}(7^2 + 1, 15) = \text{PGCD}(50, 15) = \text{PGCD}(50 - 3 \times 15, 15) = \text{PGCD}(5, 15) = 5.$$

Les facteurs premiers de 15 sont donc 3 et 5.

(c) On prend $M = 2^{11} = 2048$, c'est à dire qu'il y a 11 bits dans le premier registre et un certain nombre de bits dans le deuxième registre (on peut prendre 11 mais on en fait on peut faire beaucoup mieux car $f(x)$ prend seulement 4 valeurs comme vu en (a). Donc 2 bits auxiliaires suffisent pour coder $f(x) \in \{1, 7, 4, 13\}$).

(c1) Après les portes de Hadamard l'état est :

$$\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{x=0}^{2^{11}-1} |x\rangle \otimes |0\rangle.$$

(c2) Après U_f l'état est :

$$\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{x=0}^{2^{11}-1} |x\rangle \otimes |f(x)\rangle.$$

qui est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \{ |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |7\rangle + |2\rangle \otimes |4\rangle + |3\rangle \otimes |13\rangle \\ |4\rangle \otimes |1\rangle + |5\rangle \otimes |7\rangle + |6\rangle \otimes |4\rangle + |7\rangle \otimes |13\rangle \\ |8\rangle \otimes |1\rangle + |9\rangle \otimes |7\rangle + |0\rangle \otimes |4\rangle + |11\rangle \otimes |13\rangle \\ \dots \}$$

Dans l'intervalle $[0, 2^{11}]$ on peut mettre $\frac{2^{11}}{4} = 2^9 = 512$ fois la période de longueur 4. Donc cet état s'écrit aussi :

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{j=0}^{2^9-1} (|4j\rangle \otimes |1\rangle + |1+4j\rangle \otimes |7\rangle + |2+4j\rangle \otimes |4\rangle + |3+4j\rangle \otimes |13\rangle).$$

(c3) Appliquons la QFT à cette somme. Pour chaque terme on a :

$$\text{QFT}|x_0 + 4j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{y=0}^{2^{11}-1} e^{2\pi i \frac{(x_0+4j)y}{2^{11}}} |y\rangle$$

avec $x_0 = 0, 1, 2$ et 3 .

En remplaçant on trouve la formule (voir cours) :

$$\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{x_0=0}^3 \left\{ \sum_{y=0}^{2^{11}-1} e^{2\pi i \frac{x_0 y}{2^{11}}} \sum_{j=0}^{2^9-1} e^{2\pi i \frac{j y}{2^9}} |y\rangle \right\} \otimes |f(x_0)\rangle$$

ou $|f(x_0)\rangle$ vaut respectivement $|1\rangle; |7\rangle; |4\rangle; |13\rangle$.

(c4) La fonction $\text{Pr}(y)$ vaut :

$$\text{Pr}(y) = \frac{1}{(2^{11})^2} \sum_{x_0=0}^3 \left| \sum_{j=0}^{2^9-1} e^{2\pi i \frac{j y}{2^9}} \right|^2 \\ = \frac{4}{2^{22}} \left| \sum_{j=0}^{511} e^{2\pi i \frac{j y}{512}} \right|^2.$$

Essayons les valeurs $y = 0, y = 512, y = 2 \times 512 = 1024$ et $y = 3 \times 512 = 1536$. On trouve pour ces 4 valeurs

$$\text{Prob}(y) = \frac{2^2}{2^{22}} \cdot (2^9)^2 = \frac{2^2}{2^{22}} \cdot 2^{18} = \frac{1}{4}.$$

Donc pour toutes les autres valeurs on doit avoir $\text{Prob}(y) = 0$. C'est à dire que la mesure va certainement donner une des 4 valeurs

$$y \in \{0, 512, 1024, 1536\}.$$

(c5) Supposons que la mesure donne $y = 1536$. Alors on a

$$\frac{y}{M} = \frac{1536}{2048} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi le dénominateur 4 est un candidat pour r . On essaye $r = 4$. On fait une vérification $a^r = 7^4 = \dots = 1 \pmod{15} \implies$ SUCCES. (En fait ici la mesure y correspond à $k = 3$ qui est premier avec $r = 4$: c'est pour cela que l'on a un succès).

(c6)

- Supposons que la mesure donne $y = 0$. On ne peut rien tirer pour r car $\frac{y}{M} = 0 = \frac{k}{r}$ pour $k = 0$ et r est quelconque. ECHEC
- Supposons que la mesure donne $y = 512$. Alors

$$\frac{y}{M} = \frac{512}{2048} = \frac{2^9}{2^{11}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

le dénominateur est $r = 4$. On vérifie $a^r = 7^4 = 1 \pmod{15}$ SUCCES. (En fait ici la mesure y correspond à $k = 1$ qui est premier avec $r = 4$: c'est pour cela que l'on a un succès).

- Supposons que la mesure donne $y = 1024$. Alors

$$\frac{y}{M} = \frac{1024}{2048} = \frac{1}{2}.$$

Ici le dénominateur est 2. On essaye $r = 2$ en vérifiant $a^r = 7^2 = 49 = 3 \neq 1 \pmod{15} \implies$ ECHEC. $r = 2$ ne peut pas être le bon résultat. (En fait ici la mesure donne un y qui correspond à $k = 2$ et ce nombre n'est pas premier avec $r = 4$: c'est pour cela que l'on a un échec.)

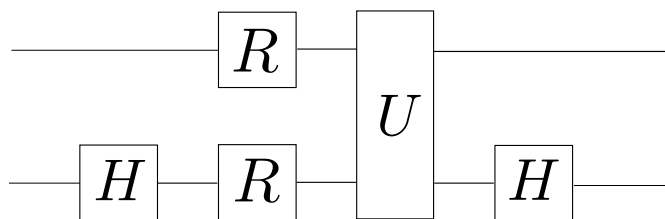
Exercice 2 *Identités utiles pour la réalisation expérimentale de la porte CNOT par RMN*

(a)

$$H = \hbar J(|00\rangle\langle 00| - |01\rangle\langle 01| - |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11|)$$

$$U = e^{-i\frac{\pi}{4}}|00\rangle\langle 00| + e^{i\frac{\pi}{4}}|01\rangle\langle 01| + e^{i\frac{\pi}{4}}|10\rangle\langle 10| + e^{-i\frac{\pi}{4}}|11\rangle\langle 11|$$

(b)



(c) On peut prouver que $(\mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes H) U (R \otimes R) (\mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes H)$ donne le CNOT en essayant toutes les combinaisons possibles de x et y .

D'abord notez que

$$R = \exp\left(i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_z}{2}\right) = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix},$$

$$R|0\rangle = e^{i\frac{\pi}{4}}|0\rangle, \quad R|1\rangle = e^{-i\frac{\pi}{4}}|1\rangle,$$

et

$$U = \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\sigma_z \otimes \sigma_z\right) = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\pi}{4}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{pmatrix}$$

On va essayer $|xy\rangle = |10\rangle$:

$$(\mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes H)|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle + |11\rangle)$$

$$(R \otimes R)(\mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes H)|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{2}}|11\rangle$$

$$U(R \otimes R)(\mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes H)|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}|10\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{3\pi}{4}}|11\rangle$$

$$\begin{aligned} (\mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes H)U(R \otimes R)(\mathbb{I}_{2 \times 2} \otimes H)|10\rangle &= \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}|1\rangle \otimes (|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}|1\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{-i\frac{3\pi}{4}})|10\rangle + \frac{1}{2}(e^{i\frac{\pi}{4}} - e^{-i\frac{3\pi}{4}})|11\rangle \\ &= \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(1 + e^{-i\pi})|10\rangle + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(1 - e^{-i\pi})|11\rangle \\ &= e^{i\frac{\pi}{4}}|11\rangle \end{aligned}$$

En essayant de même façon les autres combinaisons de x et y on vérifie que cette opération est une sorte de CNOT (mais pas le CNOT standard).

Exercice 3 Remarques sur la transformée de Fourier Quantique

La transformée de Fourier quantique agit sur les vecteurs de base

$$|x\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |M-1\rangle\}$$

comme suit :

$$\text{QFT } |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{y=0}^{M-1} e^{2\pi i \frac{xy}{M}} |y\rangle.$$

(a) $M = 2$:

$$\begin{aligned} \text{QFT } |x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{2\pi i \frac{x \cdot 0}{2}} |0\rangle + e^{2\pi i \frac{x \cdot 1}{2}} |1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\pi x} |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-1)^x |1\rangle) \end{aligned}$$

On reconnaît que $\text{QFT}|x\rangle = H|x\rangle$ si $M = 2$.

(b) $M = 4$:

$$\begin{aligned}\text{QFT}|x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}} \left(e^{2\pi i \frac{x \cdot 0}{4}} |0\rangle + e^{2\pi i \frac{x \cdot 1}{4}} |1\rangle + e^{2\pi i \frac{x \cdot 2}{4}} |2\rangle + e^{2\pi i \frac{x \cdot 3}{4}} |3\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle + (i)^x |1\rangle + (-1)^x |2\rangle + (-i)^x |3\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \{ (|0\rangle + (i)^x |1\rangle) + (-1)^x (|2\rangle + (i)^x |3\rangle) \}\end{aligned}$$

Notez la structure hiérarchique :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (i)^x |1\rangle)}_{|\bar{0}\rangle} + (-1)^x \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle + (i)^x |3\rangle)}_{|\bar{1}\rangle} \right\}$$

(c) Il suffit de montrer que l'orthogonalité de la base computationnelle $|x\rangle$ est préservée.

$$\begin{aligned}\langle x' | (\text{QFT})^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{y'=0}^{M-1} e^{-2\pi i \frac{x' y'}{M}} \langle y' | \\ \Rightarrow \langle x' | (\text{QFT})^\dagger (\text{QFT}) | x \rangle &= \frac{1}{M} \sum_{y'=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{M-1} e^{-2\pi i \frac{x' y'}{M}} e^{2\pi i \frac{x y}{M}} \langle y' | y \rangle\end{aligned}$$

Grâce à $\langle y' | y \rangle = \delta_{y' y}$ on obtient :

$$\langle x' | (\text{QFT})^\dagger (\text{QFT}) | x \rangle = \frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} e^{-2\pi i \frac{(x'-x)y}{M}}$$

- Cette expression est trivialement égale à 1 si $x' = x$.
- Si $x' \neq x$ une façon de la calculer est de reconnaître la série géométrique :

$$\begin{aligned}\frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} e^{2\pi i \frac{(x-x')y}{M}} &= \frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} \left(e^{2\pi i \frac{(x-x')}{M}} \right)^y \\ &= \frac{1}{M} \frac{1 - \left(e^{2\pi i \frac{(x-x')}{M}} \right)^M}{1 - e^{2\pi i \frac{(x-x')}{M}}} \\ &= \frac{1}{M} \frac{1 - 1}{1 - e^{2\pi i \frac{(x-x')}{M}}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Finalement, on trouve $\langle x' | (\text{QFT})^\dagger (\text{QFT}) | x \rangle = \delta_{x x'} = \langle x' | x \rangle$

Exercice 4 Période d'une fonction et factorisation de $N = 15$

(a) On calcule $7^0 = 1 \pmod{15}$, $7^1 = 7 \pmod{15}$, $7^2 = 49 = 19 = 4 \pmod{15}$, $7^3 = 28 = 13 \pmod{15}$ et $7^4 = 91 = 31 = 1 \pmod{15}$. Donc, $\text{Ord}_{15}(7) = 4$.

(b) On vérifie que l'ordre $r = 4$ est pair et que $a^{r/2} \neq -1 \pmod{15}$. En effet $a^{r/2} = 7^2 = 49 = 4 \neq -1 \pmod{15}$ (car $-1 = 14 \pmod{15}$). Donc

$$0 = (7^4 - 1) = (7^2 - 1)(7^2 + 1) \pmod{15}$$

et puisque $7^2 + 1 \neq 0 \pmod{15}$ il faut qu'une partie de 15 divise $7^2 - 1$ et qu'une autre partie de 15 divise $7^2 + 1$. En d'autres termes $\text{PGCD}(7^2 - 1, 15)$ et $\text{PGCD}(7^2 + 1, 15)$ sont non triviaux.

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(7^2 - 1, 15) &= \text{PGCD}(48, 15) = \text{PGCD}(48 - 15, 15) \\ &= \text{PGCD}(48 - 30, 15) = \text{PGCD}(48 - 45, 15) \\ &= \text{PGCD}(3, 15) = 3 \end{aligned}$$

et

$$\text{PGCD}(7^2 + 1, 15) = \text{PGCD}(50, 15) = \text{PGCD}(50 - 3 \times 15, 15) = \text{PGCD}(5, 15) = 5.$$

Les facteurs premiers de 15 sont donc 3 et 5.

(c) On prend $M = 2^{11} = 2048$, c'est à dire qu'il y a 11 bits dans le premier registre et un certain nombre de bits dans le deuxième registre (on peut prendre 11 mais on en fait on peut faire beaucoup mieux car $f(x)$ prend seulement 4 valeurs comme vu en (a). Donc 2 bits auxiliaires suffisent pour coder $f(x) \in \{1, 7, 4, 13\}$).

(c1) Après les portes de Hadamard l'état est :

$$\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{x=0}^{2^{11}-1} |x\rangle \otimes |0\rangle.$$

(c2) Après U_f l'état est :

$$\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{x=0}^{2^{11}-1} |x\rangle \otimes |f(x)\rangle.$$

qui est égal à

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \{ |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |7\rangle + |2\rangle \otimes |4\rangle + |3\rangle \otimes |13\rangle \\ &\quad |4\rangle \otimes |1\rangle + |5\rangle \otimes |7\rangle + |6\rangle \otimes |4\rangle + |7\rangle \otimes |13\rangle \\ &\quad |8\rangle \otimes |1\rangle + |9\rangle \otimes |7\rangle + |10\rangle \otimes |4\rangle + |11\rangle \otimes |13\rangle \\ &\quad \dots \} \end{aligned}$$

Dans l'intervalle $[0, 2^{11}]$ on peut mettre $\frac{2^{11}}{4} = 2^9 = 512$ fois la période de longueur 4. Donc cet état s'écrit aussi :

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{j=0}^{2^9-1} (|4j\rangle \otimes |1\rangle + |1+4j\rangle \otimes |7\rangle + |2+4j\rangle \otimes |4\rangle + |3+4j\rangle \otimes |13\rangle).$$

(c3) Appliquons la QFT à cette somme. Pour chaque terme on a :

$$\text{QFT}|x_0 + 4j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{y=0}^{2^{11}-1} e^{2\pi i \frac{(x_0+4j)y}{2^{11}}} |y\rangle$$

avec $x_0 = 0, 1, 2$ et 3 .

En remplaçant on trouve la formule (voir cours) :

$$\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{x_0=0}^3 \left\{ \sum_{y=0}^{2^{11}-1} e^{2\pi i \frac{x_0 y}{2^{11}}} \sum_{j=0}^{2^9-1} e^{2\pi i \frac{j y}{2^9}} |y\rangle \right\} \otimes |f(x_0)\rangle$$

ou $|f(x_0)\rangle$ vaut respectivement $|1\rangle$; $|7\rangle$; $|4\rangle$; $|13\rangle$.

(c4) La fonction $\text{Pr}(y)$ vaut :

$$\begin{aligned} \text{Pr}(y) &= \frac{1}{(2^{11})^2} \sum_{x_0=0}^3 \left| \sum_{j=0}^{2^9-1} e^{2\pi i \frac{j y}{2^9}} \right|^2 \\ &= \frac{4}{2^{22}} \left| \sum_{j=0}^{511} e^{2\pi i \frac{j y}{512}} \right|^2. \end{aligned}$$

Essayons les valeurs $y = 0, y = 512, y = 2 \times 512 = 1024$ et $y = 3 \times 512 = 1536$. On trouve pour ces 4 valeurs

$$\text{Prob}(y) = \frac{2^2}{2^{22}} \cdot (2^9)^2 = \frac{2^2}{2^{22}} \cdot 2^{18} = \frac{1}{4}.$$

Donc pour toutes les autres valeurs on doit avoir $\text{Prob}(y) = 0$. C'est à dire que la mesure va certainement donner une des 4 valeurs

$$y \in \{0, 512, 1024, 1536\}.$$

(c5) Supposons que la mesure donne $y = 1536$. Alors on a

$$\frac{y}{M} = \frac{1536}{1048} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi le dénominateur 4 est un candidat pour r . On essaye $\Omega = 4$. On fait une vérification $a^r = 7^4 = \dots = 1 \pmod{15}$. \implies SUCCES. (En fait ici la mesure y correspond à $k = 3$ qui est premier avec $r = 4$: c'est pour cela que l'on a un succès).

(c6) Supposons que la mesure donne $y = 0$. On ne peut rien tirer pour r car $\frac{y}{M} = 0 = \frac{k}{\omega}$ pour $k = 0$ et r est quelconque. ECHEC

1. Supposons que la mesure donne $y = 512$. Alors

$$\frac{y}{M} = \frac{512}{2048} = \frac{2^9}{2^{11}} = \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

le dénominateur est $r = 4$. On vérifie $a^r = 7^4 = 1 \pmod{15}$ SUCCES. (En fait ici la mesure y correspond à $k = 1$ qui est premier avec $r = 4$: c'est pour cela que l'on a un succès).

2. Supposons

$$\frac{y}{M} = \frac{1024}{2048} = \frac{1}{2}.$$

Ici le dénominateur est 2. On essaye $r = 2$ en vérifiant $ar = 7^2 = 49 = 3 \neq 1 \pmod{15} \implies$ ECHEC. $r = 2$ ne peut pas être le bon résultat. (En fait ici la mesure donne un y qui correspond à $k = 2$ et ce nombre n'est pas premier avec $r = 4$: c'est pour cela que l'on a un échec.)