# Solution de la série 10
# Traitement quantique de l'information II

**Exercice 1** *Etats de mélange*

**a)** Pour la première source la matrice densité est :

$$\rho = \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

et pour la deuxième :

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}}\right)\right\} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| - \langle 1|}{\sqrt{2}}\right)\right\} \\
=& \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|0\rangle\langle 1|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 1|}{2}\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle\langle 0|}{2} - \frac{|0\rangle\langle 1|}{2} - \frac{|1\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 1|}{2}\right) \\
=& \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}|1\rangle\langle 1| = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Nous voyons que la matrice densité peut correspondre à plusieures préparations physiques de la source.

**b)** Ici on a la matrice densité :

$$\begin{aligned}
\rho =& \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\langle 0| + \langle 1|}{\sqrt{2}}\right) \\
=& \frac{1}{2}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{2}\left(\frac{|0\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|0\rangle\langle 1|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 0|}{2} + \frac{|1\rangle\langle 1|}{2}\right) \\
=& \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|0\rangle\langle 1| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \\
=& \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

<u>Décomposition spectrale</u> : il faut calculer les valeurs propres et les vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \lambda v_1 \\ \frac{1}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \lambda v_2 \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{3}{4} - \lambda\right)\left(\frac{1}{4} - \lambda\right) - \frac{1}{16} = 0.$$

$$\Rightarrow (4\lambda)^2 - 4\lambda(3+1) + 3 - 1 = 0$$

$$(4\lambda)^2 - 4(4\lambda) + 2 = 0$$

$$4\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{4-2}}{1} \Rightarrow \lambda_\pm = \frac{2 \pm \sqrt{2}}{4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) v_1 \Rightarrow \text{si} \quad v_1 = 1 \quad \text{on a} \quad v_2 = \sqrt{2} - 1$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} \quad \text{correspond à} \quad \lambda_+ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}v_1 + \frac{1}{4}v_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right) v_1 \Rightarrow \text{si} \quad v_1 = 1 \quad \text{on a} \quad v_2 = -1 - \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} \quad \text{correspond à} \quad \lambda_- = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4}$$

<u>Normalisons les vecteurs</u> :

$$\lambda_+ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{correspond à} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (\sqrt{2} - 1)^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} - 1 \end{pmatrix} = |v_+\rangle$$

$$\lambda_- = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \text{correspond à} \quad \frac{1}{\sqrt{1 + (1 + \sqrt{2})^2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - \sqrt{2} \end{pmatrix} = |v_-\rangle$$

En notation de Dirac

$$\rho = \lambda_+ |v_+\rangle\langle v_+| + \lambda_- |v_-\rangle\langle v_-|$$

**Exercice 2** *Sphère de Bloch*

**a)**

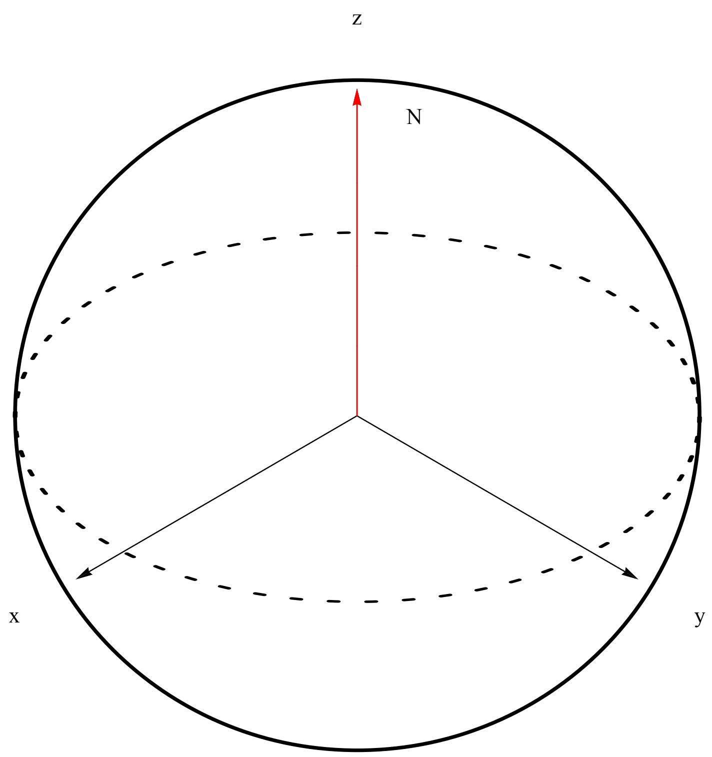
$$\begin{aligned} \rho^2 &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{1} + \vec{N} \cdot \vec{\sigma}\right)^2 \\ &= \frac{1}{4}\left(\mathbf{1} + N_x^2 X^2 + N_y^2 Y^2 + N_z^2 Z^2\right) \\ &+ \frac{1}{4} N_x N_y (XY + YX) + \frac{1}{4} N_x N_z (XZ + ZX) + \frac{1}{4} N_y N_z (YZ + ZY) \\ &+ \frac{1}{4} 2\vec{N} \cdot \vec{\sigma} \end{aligned}$$

Les carrés des matrices de Pauli sont égaux à la matrice unité et ils anticommutent, donc

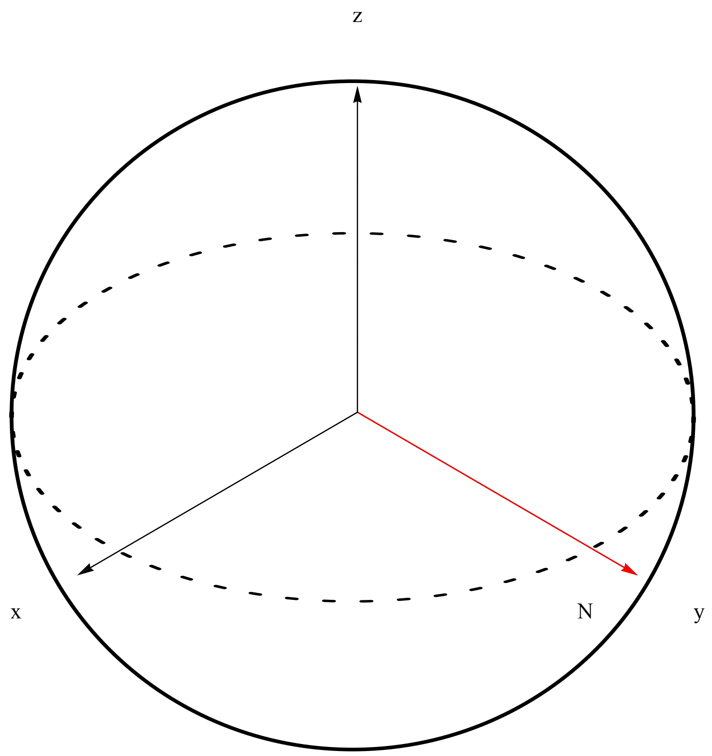
$$\rho^2 = \frac{1}{4}\left(\mathbf{1} + \left\|\vec{N}\right\|^2\right) + \frac{1}{2}\vec{N}\cdot\vec{\sigma}$$

qui est égal à $\rho$ si $\left\|\vec{N}\right\| = 1$.

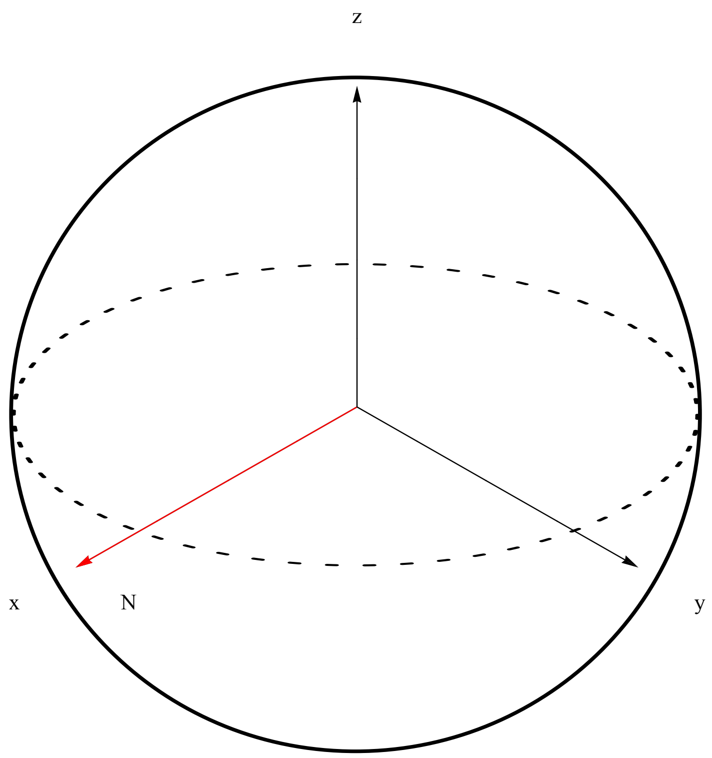
**b)** Pour $\vec{N} = (0, 0, +1)$ :



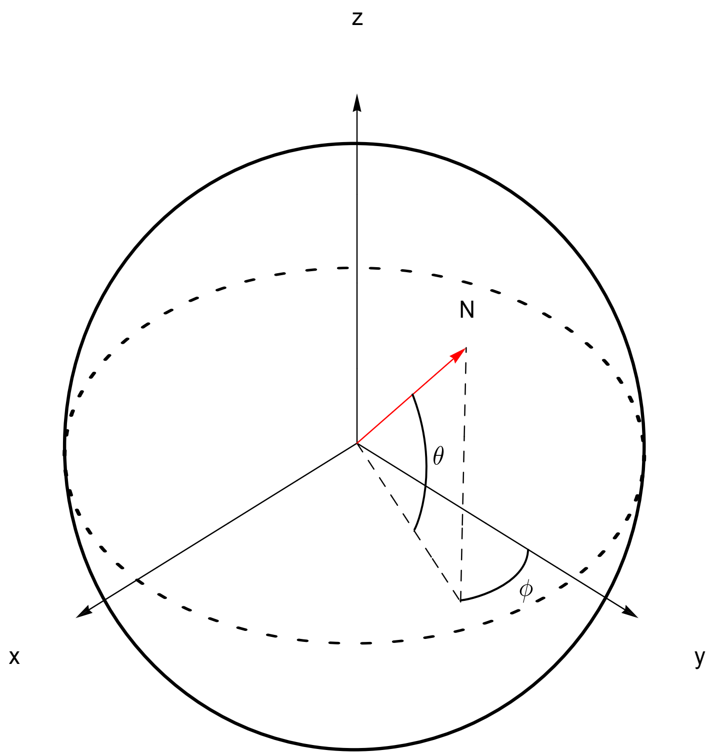

Pour $\vec{N} = (0, +1, 0)$ :




Pour $\vec{N} = (+1, 0, 0)$ :




Pour $\vec{N} = (\cos\theta \sin\varphi, \cos\theta \cos\varphi, \sin\theta)$ :




**c)** Pour $\vec{N}=(0,0,0)$ $\rho=\frac{1}{2}\mathbf{1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N}=(0,0,+1)$ $\rho=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\sigma_z)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N}=(0,0,+1)$ $\rho=\frac{1}{2}(\mathbf{1}-\sigma_z)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N}=(0,+1,0)$ $\rho=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\sigma_y)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -i\\ i & 1\end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N}=(0,-1,0)$ $\rho=\frac{1}{2}(\mathbf{1}-\sigma_y)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N}=(+1,0,0)$ $\rho=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\sigma_x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N}=(-1,0,0)$ $\rho=\frac{1}{2}(\mathbf{1}-\sigma_x)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N}=(\cos\theta\sin\varphi,\cos\theta\cos\varphi,\sin\theta)$
$\rho=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\cos\theta\sin\varphi\sigma_x+\cos\theta\cos\varphi\sigma_y+\sin\theta\sigma_z)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\sin\theta & -i\cos\theta e^{i\varphi}\\ i\cos\theta e^{-i\varphi} & 1-\sin\theta\end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N}=(0,0,+\alpha)$ $\rho=\frac{1}{2}(\mathbf{1}+\alpha\sigma_z)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+\alpha & 0\\ 0 & 1-\alpha\end{pmatrix}$.

Pour $\vec{N}=(0,0,-\alpha)$ $\rho=\frac{1}{2}(\mathbf{1}-\alpha\sigma_z)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1-\alpha & 0\\ 0 & 1+\alpha\end{pmatrix}$.

Pour avoir un état pur il faut avoir $\left\|\vec{N}\right\|=1$.

Donc les numeros 2,3,4,5 sont des états purs. Le Ket correspondant est :

$$|0\rangle \quad \text{et} \quad |1\rangle \quad \text{pour} \quad (0,0,\pm 1)$$

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{pour} \quad (\pm 1, 0, 0)$$

$$\frac{|0\rangle + i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \frac{i|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \quad \text{pour} \quad (0, \pm 1, 0)$$

$$e^{i\varphi/2} \cos\theta |0\rangle \quad \text{et} \quad e^{-i\varphi/2} \sin\theta |1\rangle \quad \text{pour} \quad (\cos\theta \sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, \sin\theta)$$