Série 3
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Mesures de polarisation des photons.*

On suppose que l'on envoie des photons préparés dans l'état $|\Psi\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle$. Cet état est un état de polarisation linéaire. On va ensuite les observer avec un détecteur placé juste après un analyseur placé à un angle α. Pour l'analyseur α on enregistre le nombre $p_\alpha = \pm 1$ suivant que le photon est transmis ou non. L'observable correspondante est $P_\alpha = (+1)|\alpha\rangle\langle\alpha| + (-1)|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|$.

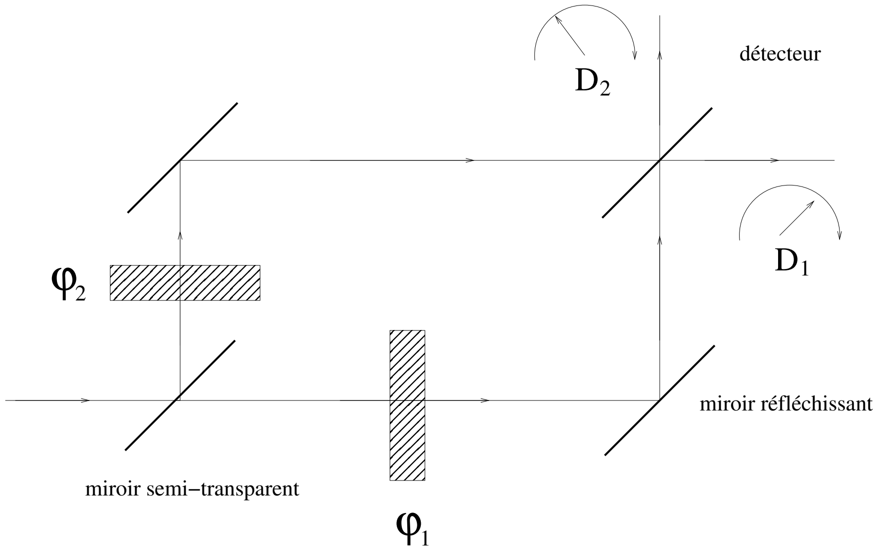
1. Calculez la probabilité de détection et de non-détection pour les deux analyseurs : $\text{Prob}\,(p_\alpha = \pm 1)$ et $\text{Prob}\,(p_\beta = \pm 1)$.

2. Calculez l'espérance et la variance de la variable aléatoire p_α et p_β.

3. Considerez à présent les observables $P_\alpha = (+1)\,|\alpha\rangle\,\langle\alpha| + (-1)\,|\alpha_\perp\rangle\,\langle\alpha_\perp|$ et $P_\beta = (+1)\,|\beta\rangle\,\langle\beta| + (-1)\,|\beta_\perp\rangle\,\langle\beta_\perp|$. Vérifiez que l'espérance et la variance trouvée au point précédent sont donnée par
$$\text{Exp}\,[p_\varphi] = \langle\Psi|\,P_\varphi\,|\Psi\rangle \ \text{ et } \ \text{Var}\,[p_\varphi] = \langle\Psi|\,P_\varphi^2\,|\Psi\rangle - \langle\Psi|\,P_\varphi\,|\Psi\rangle^2$$
où $\varphi = \alpha,\ \beta$.

4. On se donne maintenant deux analyseurs d'angles α et β. On considère les expériences suivantes : (i) on mesure P_α d'abord puis P_β ensuite ; (ii) on mesure P_β d'abord puis P_α ensuite. Donnez les deux distributions de probabilités correspondantes pour les événements possibles $(p_\alpha, p_\beta) = (\pm 1, \pm 1)$. Ces deux distributions sont-elles les mêmes ?

Exercice 2 *Interféromètre de Mach-Zehnder*



Une source de photons unique envoie un photon dans l'interféromètre. Le photon passe à travers un miroir semi-transparent, puis est déphasé par les déphaseurs $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$, puis est réfléchi par les miroirs réfléchissants et enfin passe à travers le dernier miroir semi-transparent. Le processus de mesure correspond à une détection dans les photo-détecteurs D_1 et D_2.

On veut calculer la probabilité de détection dans D_1 et D_2 en fonction des déphasages associés à chaque chemin $e^{i\varphi_1}$ et $e^{i\varphi_2}$.

On admettra que l'espace des états possibles (espace de Hilbert) du photon est égal à $\mathbb{C}^2 = \{\alpha\,|h\rangle + \beta\,|v\rangle\}$ oú α et β sont des nombres complexes (avec $|\alpha|^2+|\beta|^2 = 1$) et $|h\rangle$ et $|v\rangle$ sont les deux états de la direction de la vitesse "horizontale" et "verticale". On admettra aussi que les miroirs semi-transparents opèrent les transitions suivantes : $|h\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + i|v\rangle)$ et $|v\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}(i|h\rangle+|v\rangle)$. Les miroirs réfléchissant opèrent les transitions : $|h\rangle \to i|v\rangle$ et $|v\rangle \to i|h\rangle$.

1. Donnez l'état initial, l'état après le premier miroir semi-transparent, l'état après les déphaseurs, l'état après les miroirs réfléchissants et enfin l'état final après le deuxième miroir semi-transparent (mais avant la mesure).

2. Calculez la probabilité de détection dans D_1 et/ou D_2. Que notez-vous de spécial dans sa dépendance en fonction de φ_1 et φ_2.