

Solution de la série 11
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Effet de la décohérence dans l'algorithme de Shor*

1. Après les portes de Hadamard :

$$\begin{aligned} & \tilde{H}_0 \otimes \tilde{H}_1 \otimes \mathbb{I} \otimes \mathbb{I}(|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 (|0\rangle + e^{i\varphi_0}|1\rangle) \otimes (|0\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle) \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{4}}(|00\rangle + e^{i\varphi_0}|10\rangle + e^{i\varphi_1}|01\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|11\rangle) \otimes |00\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle) \otimes |0\rangle \end{aligned}$$

2. Après U_f on obtient l'état :

$$\frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle \otimes |f(0)\rangle + e^{i\varphi_1}|1\rangle \otimes |f(1)\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle \otimes |f(2)\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle \otimes |f(3)\rangle)$$

Puisque $f(x) = f(x+2)$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{4}}(|0\rangle + e^{i\varphi_0}|2\rangle) \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{\sqrt{4}}(e^{i\varphi_1}|1\rangle + e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}|3\rangle) \otimes |f(1)\rangle$$

Appliquons la QFT à chaque terme :

$$\frac{1}{4} \sum_{y=0}^3 (1 + e^{i(\varphi_0 + \frac{\pi}{2}2y)})|y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{4} \sum_{y=0}^3 (e^{i(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}y)} + e^{i(\varphi_0 + \varphi_1 + \frac{\pi}{2}3y)})|y\rangle \otimes |f(1)\rangle$$

3. L'état juste après la mesure est :

$$|\psi_{post}\rangle = \frac{1}{4}(1 + e^{i(\varphi_0 + \pi y)})|y\rangle \otimes |f(0)\rangle + \frac{1}{4}e^{i(\varphi_1 + \frac{\pi}{2}y)}(1 + e^{i(\varphi_0 + \pi y)})|y\rangle \otimes |f(1)\rangle.$$

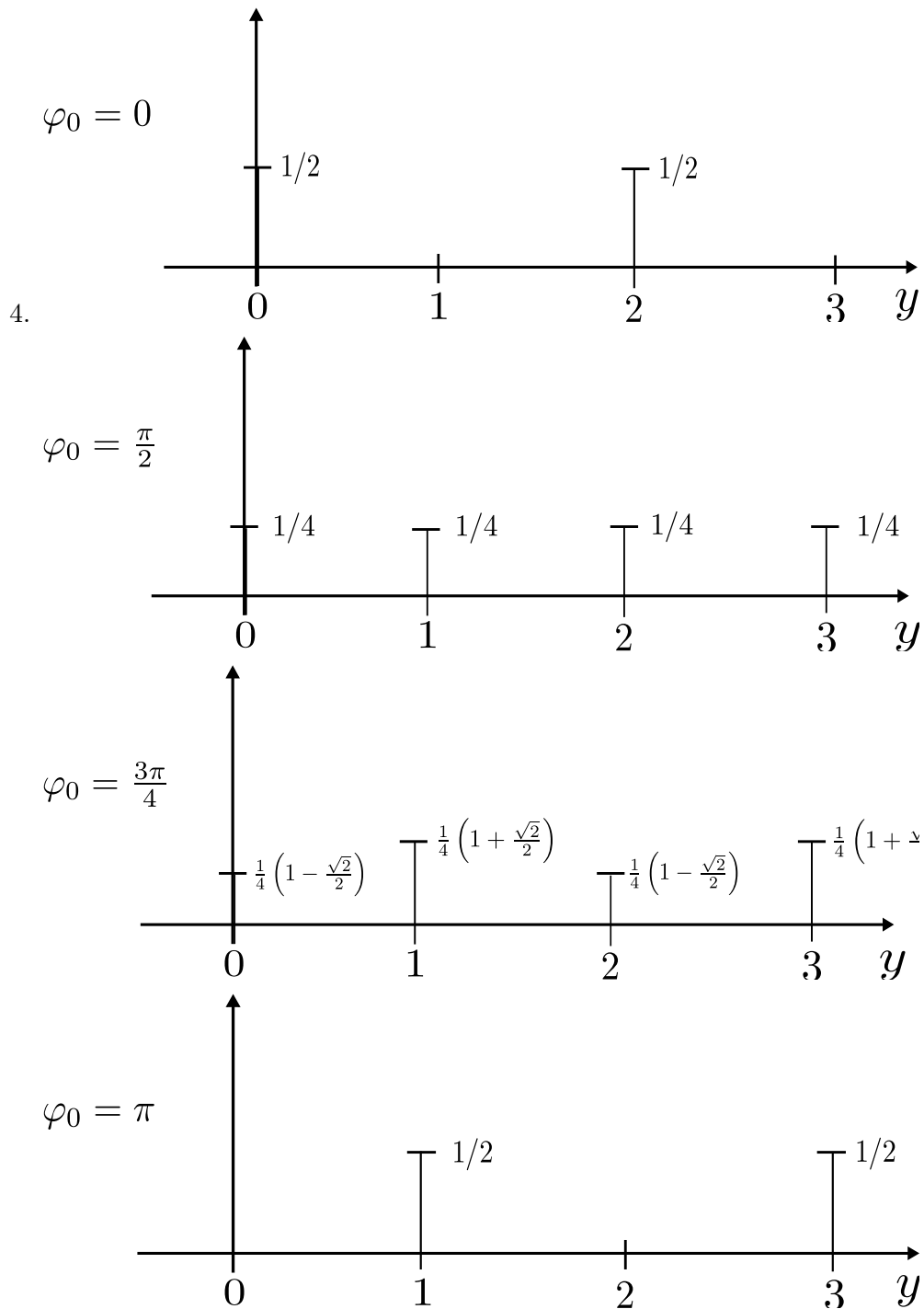
La probabilité de l'obtenir est donné par sa norme (au carré)

$$\begin{aligned} \text{Prob}(y|\varphi_0, \varphi_1) &= \frac{1}{16} \left\{ |1 + e^{i(\varphi_0 + \pi y)}|^2 + |1 + e^{i(\varphi_0 + \pi y)}|^2 \right\} \\ &= \frac{1}{8} \left((1 + \cos(\varphi_0 + \pi y))^2 + \sin^2(\varphi_0 + \pi y) \right) \end{aligned}$$

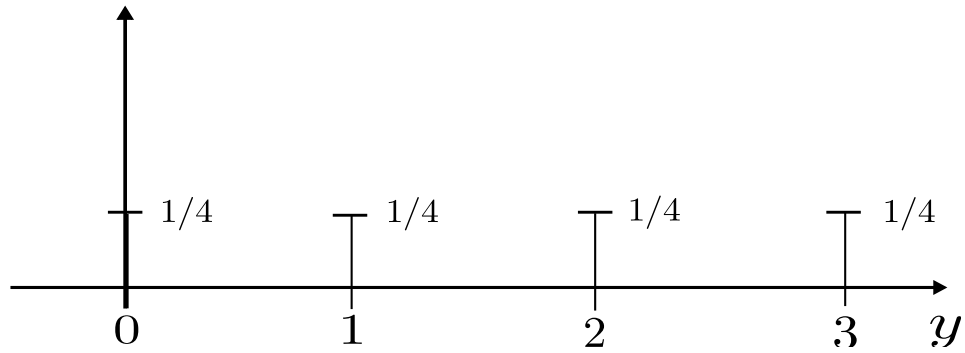
⇒

$$\text{Prob}(y|\varphi_0, \varphi_1) = \frac{1}{4} (1 + \cos(\varphi_0 + \pi y))$$

On voit que curieusement cette probabilité ne depend pas de φ_1 . Donc l'algorithme de Shor a l'air robuste par rapport à ce déphasage.



$$\text{Prob}(y) = \int d\varphi_0 \text{Prob}(y|\varphi_0) \text{Prob}(\varphi_0) = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi_0}{2\pi} \text{Prob}(y|\varphi_0) = \frac{1}{4}$$



Exercice 2

(a) On calcule $7^0 = 1 \pmod{15}$, $7^1 = 7 \pmod{15}$, $7^2 = 49 = 19 = 4 \pmod{15}$, $7^3 = 28 = 13 \pmod{15}$ et $7^4 = 91 = 31 = 1 \pmod{15}$. Donc, $\text{Ord}_{15}(7) = 4$.

(b) On vérifie que l'ordre $r = 4$ est pair et que $a^{r/2} \neq -1 \pmod{15}$. En effet $a^{r/2} = 7^2 = 49 = 4 \neq -1 \pmod{15}$ (car $-1 = 14 \pmod{15}$). Donc

$$0 = (7^4 - 1) = (7^2 - 1)(7^2 + 1) \pmod{15}$$

et puisque $7^2 + 1 \neq 0 \pmod{15}$ il faut que une partie de 15 divise $7^2 - 1$ et une autre partie de 15 divise $7^2 + 1$. En d'autres termes $\text{PGCD}(7^2 - 1, 15)$ et $\text{PGCD}(7^2 + 1, 15)$ sont non triviaux.

$$\begin{aligned} \text{PGCD}(7^2 - 1, 15) &= \text{PGCD}(48, 15) = \text{PGCD}(48 - 15, 15) \\ &= \text{PGCD}(48 - 30, 15) = \text{PGCD}(48 - 45, 15) \\ &= \text{PGCD}(3, 15) = 3 \end{aligned}$$

et

$$\text{PGCD}(7^2 + 1, 15) = \text{PGCD}(50, 15) = \text{PGCD}(50 - 3 \times 15, 15) = \text{PGCD}(5, 15) = 5.$$

Les facteurs premiers de 15 sont donc 3 et 5.

(c) On prend $M = 2^{11} = 2048$, c'est à dire qu'il y a 11 bits dans le premier registre et un certain nombre de bits dans le deuxième registre (on peut prendre 11 mais on en fait on peut faire beaucoup mieux car $f(x)$ prend seulement 4 valeurs comme vu en (a). Donc 2 bits auxiliaires suffisent pour coder $f(x) \in \{1, 7, 4, 13\}$).

(c1) Après les portes de Hadamard l'état est :

$$\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{x=0}^{2^{11}-1} |x\rangle \otimes |0\rangle.$$

(c2) Après U_f l'état est :

$$\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{x=0}^{2^{11}-1} |x\rangle \otimes |f(x)\rangle.$$

qui est égal à

$$\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \{ |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |7\rangle + |2\rangle \otimes |4\rangle + |3\rangle \otimes |13\rangle \\ |4\rangle \otimes |1\rangle + |5\rangle \otimes |7\rangle + |6\rangle \otimes |4\rangle + |7\rangle \otimes |13\rangle \\ |8\rangle \otimes |1\rangle + |9\rangle \otimes |7\rangle + |0\rangle \otimes |4\rangle + |11\rangle \otimes |13\rangle \\ \dots \}$$

Dans l'intervalle $[0, 2^{11}]$ on peut mettre $\frac{2^{11}}{4} = 2^9 = 512$ fois la période de longueur 4. Donc cet état s'écrit aussi :

$$= \frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{j=0}^{2^9-1} (|4j\rangle \otimes |1\rangle + |1+4j\rangle \otimes |7\rangle + |2+4j\rangle \otimes |4\rangle + |3+4j\rangle \otimes |13\rangle).$$

(c3) Appliquons la QFT à cette somme. Pour chaque terme on a :

$$\text{QFT}|x_0 + 4j\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{y=0}^{2^{11}-1} e^{2\pi i \frac{(x_0+4j)y}{2^{11}}} |y\rangle$$

avec $x_0 = 0, 1, 2$ et 3 .

En remplaçant on trouve la formule (voir cours) :

$$\frac{1}{\sqrt{2^{11}}} \sum_{x_0=0}^3 \left\{ \sum_{y=0}^{2^{11}-1} e^{2\pi i \frac{x_0 y}{2^{11}}} \sum_{j=0}^{2^9-1} e^{2\pi i \frac{j y}{2^9}} |y\rangle \right\} \otimes |f(x_0)\rangle$$

ou $|f(x_0)\rangle$ vaut respectivement $|1\rangle; |7\rangle; |4\rangle; |13\rangle$.

(c4) La fonction $\text{Pr}(y)$ vaut :

$$\text{Pr}(y) = \frac{1}{(2^{11})^2} \sum_{x_0=0}^3 \left| \sum_{j=0}^{2^9-1} e^{2\pi i \frac{j y}{2^9}} \right|^2 \\ = \frac{4}{2^{22}} \left| \sum_{j=0}^{511} e^{2\pi i \frac{j y}{512}} \right|^2.$$

Essayons les valeurs $y = 0, y = 512, y = 2 \times 512 = 1024$ et $y = 3 \times 512 = 1536$. On trouve pour ces 4 valeurs

$$\text{Prob}(y) = \frac{2^2}{2^{22}} \cdot (2^9)^2 = \frac{2^2}{2^{22}} \cdot 2^{18} = \frac{1}{4}.$$

Donc pour toutes les autres valeurs on doit avoir $\text{Prob}(y) = 0$. C'est à dire que la mesure va certainement donner une des 4 valeurs

$$y \in \{0, 512, 1024, 1536\}.$$

(c5) Supposons que la mesure donne $y = 1536$. Alors on a

$$\frac{y}{M} = \frac{1536}{1048} = \frac{3}{4}.$$

Ainsi le dénominateur 4 est un candidat pour r . On essaye $r = 4$. On fait une vérification $a^r = 7^4 = \dots = 1 \pmod{15}$. \implies SUCCES. (En fait ici la mesure y correspond à $k = 3$ qui est premier avec $r = 4$: c'est pour cela que l'on a un succès).

(c6)

- Supposons que la mesure donne $y = 0$. On ne peut rien tirer pour r car $\frac{y}{M} = 0 = \frac{k}{r}$ pour $k = 0$ et r est quelconque. ECHEC
- Supposons que la mesure donne $y = 512$. Alors

$$\frac{y}{M} = \frac{512}{2048} = \frac{2^9}{2^{11}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}.$$

le dénominateur est $r = 4$. On vérifie $a^r = 7^4 = 1 \pmod{15}$ SUCCES. (En fait ici la mesure y correspond à $k = 1$ qui est premier avec $r = 4$: c'est pour cela que l'on a un succès).

- Supposons que la mesure donne $y = 1024$. Alors

$$\frac{y}{M} = \frac{1024}{2048} = \frac{1}{2}.$$

Ici le dénominateur est 2. On essaye $r = 2$ en vérifiant $ar = 7^2 = 49 = 3 \neq 1 \pmod{15} \implies$ ECHEC. $r = 2$ ne peut pas être le bon résultat. (En fait ici la mesure donne un y qui correspond à $k = 2$ et ce nombre n'est pas premier avec $r = 4$: c'est pour cela que l'on a un échec.)

Exercice 3

La transformée de Fourier quantique agit sur les vecteurs de base

$$|x\rangle \in \{|0\rangle, |1\rangle, \dots, |M-1\rangle\}$$

comme suit :

$$\text{QFT } |x\rangle = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{y=0}^{M-1} e^{2\pi i \frac{xy}{M}} |y\rangle.$$

(a) $M = 2$:

$$\begin{aligned} \text{QFT } |x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{2\pi i \frac{x \cdot 0}{2}} |0\rangle + e^{2\pi i \frac{x \cdot 1}{2}} |1\rangle \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + e^{i\pi x} |1\rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (-1)^x |1\rangle) \end{aligned}$$

On reconnaît que $\text{QFT}|x\rangle = H|x\rangle$ si $M = 2$.

(b) $M = 4$:

$$\begin{aligned} \text{QFT } |x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{4}} \left(e^{2\pi i \frac{x \cdot 0}{4}} |0\rangle + e^{2\pi i \frac{x \cdot 1}{4}} |1\rangle + e^{2\pi i \frac{x \cdot 2}{4}} |2\rangle + e^{2\pi i \frac{x \cdot 3}{4}} |3\rangle \right) \\ &= \frac{1}{2} (|0\rangle + (i)^x |1\rangle + (-1)^x |2\rangle + (-i)^x |3\rangle) \\ &= \frac{1}{2} \{ (|0\rangle + (i)^x |1\rangle) + (-1)^x (|2\rangle + (i)^x |3\rangle) \} \end{aligned}$$

Notez la structure hiérarchique :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + (i)^x |1\rangle)}_{|\tilde{0}\rangle} + (-1)^x \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} (|2\rangle + (i)^x |3\rangle)}_{|\tilde{1}\rangle} \right\}$$

(c) Il suffit de montrer que l'orthogonalité de la base computationnelle $|x\rangle$ est préservée.

$$\begin{aligned}\langle x' | (\text{QFT})^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{y'=0}^{M-1} e^{-2\pi i \frac{x'y'}{M}} \langle y' | \\ \Rightarrow \langle x' | (\text{QFT})^\dagger (\text{QFT}) | x \rangle &= \frac{1}{M} \sum_{y'=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{M-1} e^{-2\pi i \frac{x'y'}{M}} e^{2\pi i \frac{xy}{M}} \langle y' | y \rangle\end{aligned}$$

Grâce à $\langle y' | y \rangle = \delta_{y'y}$ on obtient :

$$\langle x' | (\text{QFT})^\dagger (\text{QFT}) | x \rangle = \frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} e^{-2\pi i \frac{(x'-x)y}{M}}$$

- Cette expression est trivialement égale à 1 si $x' = x$.
- Si $x' \neq x$ une façon de la calculer est de reconnaître la série géométrique :

$$\begin{aligned}\frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} e^{2\pi i \frac{(x-x')y}{M}} &= \frac{1}{M} \sum_{y=0}^{M-1} \left(e^{2\pi i \frac{(x-x')}{M}} \right)^y \\ &= \frac{1}{M} \frac{1 - \left(e^{2\pi i \frac{(x-x')}{M}} \right)^M}{1 - e^{2\pi i \frac{(x-x')}{M}}} \\ &= \frac{1}{M} \frac{1 - 1}{1 - e^{2\pi i \frac{(x-x')}{M}}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Finalement, on trouve $\langle x' | (\text{QFT})^\dagger (\text{QFT}) | x \rangle = \delta_{xx'} = \langle x' | x \rangle$