Solution de la série 6
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Variation sur le problème de Simon*

1. On a $(0, \vec{x}') + (0, \vec{x}'') = (0, \vec{x}' + \vec{x}'') \in H$ et $(0, 0, ..., 0) \in H$. Les deux propriétés entrainent que H est un sous-groupe de $\mathbb{F}_3^n$. La cordinalité est $|H| = 3^{n-1}$. D'après le théorème de Lagrange il y a $|\mathbb{F}_3^n/H| = \frac{|\mathbb{F}_3^n|}{|H|} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3$ classes d'équivalence.
2. $$U_f\,|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in \mathbb{F}_3^n} |\vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{x})\rangle.$$

   Puisque f est constante sur les classes d'équivalence on peut écrire

   $$\mathbb{F}_3^n = \{\vec{a} + \vec{x}, \vec{x} \in H\} U \{\vec{b} + \vec{x}, \vec{x} \in H\} U \{\vec{c} + \vec{x}, \vec{x} \in H\}$$

   $$\begin{aligned} U_f\,|\psi_{in}\rangle &= \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in H} \{|\vec{a} + \vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{a})\rangle + |\vec{b} + \vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{b})\rangle + |\vec{c} + \vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{c})\rangle\} \\ &= \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in H} \{|\vec{a} + \vec{x}\rangle \otimes |0\rangle + |\vec{b} + \vec{x}\rangle \otimes |1\rangle + |\vec{c} + \vec{x}\rangle \otimes |2\rangle\} \end{aligned}$$
3. On a :

   $$\begin{aligned} (F \otimes \mathbb{I})\,U_f\,|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in H} \sum_{\vec{y} \in \mathbb{F}_3^n} & e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{a}+\vec{x})\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |0\rangle \\ & + e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{b}+\vec{x})\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{c}+\vec{x})\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |2\rangle \end{aligned}$$

   Grâce à l'indication :

   $$\begin{aligned} (F \otimes \mathbb{I})\,U_f\,|\psi_{in}\rangle &= \frac{1}{3} \sum_{\vec{y} \in H^\perp} e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}} |\vec{y}\rangle \otimes |2\rangle \\ &= \frac{1}{3} \sum_{\vec{y} \in H^\perp} |\vec{y}\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}} |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}} |2\rangle \right\} \\ &= \frac{1}{3} \sum_{y_1 = 0,1,2} |y_1, 0, ..., 0\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}} |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}} |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}} |2\rangle \right\} \\ &\equiv |\psi_{fin}\rangle \end{aligned}$$

4. D'après le postulat de la mesure, après la mesure l'état devient (0 si $\vec{y} \neq (y_1, 0, ..., 0)$)
$(\mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I})|\psi_{fin}\rangle = \frac{1}{3}|y_1, 0, ..., 0\rangle \otimes \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|2\rangle \right\}$
et donc :

$$\begin{aligned}
\langle\psi_{fin}|\, \mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I}|\psi_{fin}\rangle &= \langle\psi_{fin}|(\mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I})(\mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I})|\psi_{fin}\rangle \\
&= \frac{1}{9} \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|2\rangle \right\}^* \left\{ e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|2\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

5. Quand on fait une mesure on obtient
$(0, 0, ..., 0)$ ou $(1, 0, ..., 0)$ ou $(2, 0, ..., 0)$
avec probabilité $1/3$. Si on obtient $(1, 0, ..., 0)$ ou $(2, 0, ..., 0)$ on connait $H^\perp$ (puisque l'on sait que sa dimension est 1). Une fois $H^\perp$ connu on connait H. La probabilité d'échec lors d'une mesure est donc $1/3$ (événement $(0, 0, ..., 0)$).

$$\text{Prob(succès avec T mesures)} = 1 - \text{Prob(échec T fois)} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^T = 1 - \epsilon.$$

$\Rightarrow \quad \epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{|\ln \epsilon|}{\ln 3}.$

6. *Preuve de l'indication* :
   - Si $\vec{y} \in H^\perp = \{\vec{y} \mid \vec{y} \cdot \vec{x} = 0\ \forall \vec{x} \in H\}$ on a bien sûr

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right) = \sum_{\vec{x} \in H} 1 = |H| = 3^{n-1}.$$

   - Si $\vec{y} \notin H^\perp$ alors $\exists \vec{x}_0 \in H$ t.q. $\vec{y} \cdot \vec{x}_0 \neq 0$ c.à.d $= j \bmod 3$, $j = 1$ ou 2.

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right) = \left(\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right)\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right),$$

car H est un groupe et donc invariant par $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{x}_0$

$$\Rightarrow \left(\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right)\right) \left(1 - \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right)\right) = 0$$

Puisque $\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right)$ est $e^{\frac{2\pi i}{2}} \neq 1$ ou $e^{\frac{4\pi i}{2}} \neq 1$,

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right) = 0.$$