# Solution de la série 4
# Traitement quantique de l'information II

**Exercice 1** *Algorithme : probabiliste versus quantique*

1. Pour montrer que $|\langle j| U |i\rangle|^2 = R_{ji}$ est une matrice stochastique, il faut verifier que $\sum_{j=0}^{n-1} P_{ji} = 1$ et $0 \leq P_{ji} \leq 1$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} P_{ji} &= \sum_{j=0}^{n-1} |\langle j| U |i\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \langle i| U^\dagger |j\rangle \langle j| U |i\rangle \\
&= \langle i| U^\dagger \sum_{j=0}^{n-1} |j\rangle \langle j| U |i\rangle = \langle i| U^\dagger U |i\rangle \\
&= \langle i| i\rangle = 1
\end{aligned}$$

Notez que tous les termes $|\langle j| U |i\rangle|^2$ sont positifs, c'est pourquoi $0 \leq P_{ji} \leq 1$.

2. La probabilité d'observer l'état 2 à la sortie est

$$\text{Prob}(2) = P_{00}Q_{20} + P_{10}Q_{21} + P_{20}Q_{22}.$$

3. – La probabilité d'observer l'état $|2\rangle$ à la sortie est

$$\begin{aligned}
\text{Prob}(|2\rangle) &= |\langle 2| U_2U_1 |0\rangle|^2 = \langle 2| U_2U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger U_2^\dagger |2\rangle \\
&= \sum_{i=0}^{2} \sum_{j=0}^{2} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |j\rangle \langle j| U_2^\dagger |2\rangle \\
&= \sum_{i=j} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |i\rangle \langle i| U_2^\dagger |2\rangle \\
&+ \sum_{i\neq j} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |j\rangle \langle j| U_2^\dagger |2\rangle
\end{aligned}$$

Notez que la première somme est la probabilité d'observer l'état 2 à la sortie dans le cas classique :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{2} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |i\rangle \langle i| U_2^\dagger |2\rangle &= \sum_{i=0}^{2} |\langle 2| U_2 |i\rangle|^2 |\langle i| U_1 |0\rangle|^2 \\
&= P_{00}Q_{20} + P_{10}Q_{21} + P_{20}Q_{22}
\end{aligned}$$

La deuxième somme est un terme d'interférence quantique.

– En faisant la mesure intermédiaire après la première étape on observe
- $|0\rangle$ avec la probabilité $|\langle 0|\, U_1\, |0\rangle|^2$,
- $|1\rangle$ avec la probabilité $|\langle 1|\, U_1\, |0\rangle|^2$,
- $|2\rangle$ avec la probabilité $|\langle 2|\, U_1\, |0\rangle|^2$.

La probabilité d'observer l'état final $|2\rangle$ à la sortie est

$$|\langle 0|\, U_1\, |0\rangle|^2\, |\langle 2|\, U_2\, |0\rangle|^2 + |\langle 1|\, U_1\, |0\rangle|^2\, |\langle 2|\, U_2\, |1\rangle|^2 + |\langle 2|\, U_1\, |0\rangle|^2\, |\langle 2|\, U_2\, |2\rangle|^2$$

qui correspond au cas classique.

**Exercice 2** *Vérification pour bonne compréhension si besoin est*

(a) Prendre b=0 :

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{c=0}^{1}|c\rangle.$$

Prendre b=1 :

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{c=0}^{1}(-1)^c|c\rangle.$$

Pour $m = 2$ :

$$\begin{aligned}
H^{\otimes 2}|0_2\rangle = H \otimes H|00\rangle &= H \otimes H|0\rangle \otimes |0\rangle \\
&= H|0\rangle \otimes H|0\rangle \\
&= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \\
&= \frac{|0\rangle \otimes |0\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle + |0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |1\rangle}{2} \\
&= \frac{1}{(\sqrt{2})^2}(|00\rangle + |10\rangle + |01\rangle + |11\rangle).
\end{aligned}$$

Pour $m = 3$ procéder de la même manière.

$$\begin{aligned}
H^{\otimes 2}|b_1 b_2\rangle &= H|b_1\rangle \otimes |b_2\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{c_1}(-1)^{b_1 c_1}|c_1\rangle \otimes \sum_{c_2}(-1)^{b_2 c_2}|c_2\rangle \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \sum_{c_1, c_2}(-1)^{b_1 c_1}(-1)^{b_2 c_2}|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \\
&= (\frac{1}{\sqrt{2}})^2 \sum_{c_1, c_2}(-1)^{b_1 c_1 + b_2 c_2}|c_1 c_2\rangle.
\end{aligned}$$

**Exercice 3** *Variante sur l'algorithme de Deutsch-Josza*

(a) Le vecteur $\underline{a} = (a_1, \cdots, a_m)$ possède $m$ composantes, donc il faut $m$ équations du type $f(\underline{x}) = \underline{a}.\underline{x} + b$ pour le déterminer. Donc il faut $m$ valeurs fe $f(\underline{x})$ et il faut poser $m$ questions á l'oracle classique.

(b) En reprenant le circuit quantique de Deutsch-Josza du cours, l' état final de sortie juste avant la mesure est :

$$|\psi_{fin}\rangle = \sum_{c_1,\cdots,c_m} \left\{ \frac{1}{2^m} \sum_{\underline{x}} (-1)^{f(x)} (-1)^{\underline{x}.\underline{c}} \right\} |c_1 \cdots c_m\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|a\rangle - |1\rangle).$$

Pour $f(\underline{x}) = \underline{a}.\underline{x} \oplus b$ grâce à l'indication :

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{x}} (-1)^{f(x)} (-1)^{\underline{x}.\underline{c}} &= (-1)^b \sum_{\underline{x}} (-1)^{(\underline{a} \oplus \underline{c}).\underline{x}} \\ &= (-1)^b \, 2^m \text{ si } \underline{a} \oplus \underline{c} = 0 \text{ et } = 0 \text{ sinon .} \end{aligned}$$

Ainsi

$$|\psi_{fin}\rangle = (-1)^b \, |a\rangle \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Ce résultat est remarquable car avec 1 seule mesure des $m$ premiers qubits au trouve $\underline{a}$ avec probabilité 1 !

*Preuve de l' indication :*

$$\begin{aligned} \sum_{\underline{x} \in \mathbb{F}_2^m} (-1)^{\underline{x}.\underline{z}} &= \sum_{x_1,\cdots,x_m} (-1)^{x_1 z_1} (-1)^{x_2 z_2} \cdots (-1)^{x_m z-m} \\ &= (\sum_{x_1} (-1)^{x_1 z_1})(\sum_{x_2} (-1)^{x_2 z_2}) \cdots (\sum_{x_m} (-1)^{x_m z_m}) \\ &= (1 + (-1)^{z_1})(1 + (-1)^{z_2}) \cdots (1 + (-1)^{z_m}). \end{aligned}$$

- Si $(z_1, \cdots, z_m) = (0, \cdots, 0)$ on trouve $2^m$.

- Sinon au moins un des $z_i \neq 0$ (et donc ce $z_i = 1$) et puisque $1 + (-1)^{z_i} = 1 + (-1) = 0$ on trouve 0 pour le produit ci-dessus.