Solution de la série 2
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Photons et particules classiques*

1.

$$\begin{aligned}\langle\alpha|\theta\rangle &= (\sin\alpha\langle x| + \langle y|\cos\alpha)(\sin\theta|x\rangle + \cos\theta|y\rangle) \\ &= \sin\alpha\sin\theta + \cos\alpha\cos\theta \\ &= \cos(\theta-\alpha).\end{aligned}$$

Donc $|\langle\alpha|\theta\rangle|^2 = \cos^2(\theta-\alpha)$. Et

$$\begin{aligned}\langle\alpha_\perp|\theta\rangle &= (-\cos\alpha\langle x| + \sin\alpha\langle y|)(\sin\theta|x\rangle + \cos\theta|y\rangle) \\ &= -\cos\alpha\sin\theta + \sin\alpha\cos\theta \\ &= \sin(\alpha-\theta).\end{aligned}$$

Donc $|\langle\alpha_\perp|\theta\rangle|^2 = \sin^2(\theta-\alpha)$.

2. L' état est intriqué, c.a.d qu'il ne peut pas s'écrire comme un produit tensoriel :

$$\sin\theta|x,1\rangle + \cos\theta|y,2\rangle = |\psi\rangle$$

Probabilité d'observer le photon sur la trajectoire 1 ou 2 : prendre les projecteurs $P_1 = I\otimes|1\rangle\langle 1\rangle$ et $P_2 = I\otimes|2\rangle\langle 2|$ où I est l'identité ($I = |x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y|$).

$$\begin{aligned}\text{Prob}(1) = \langle\psi|P_1|\psi\rangle &= (\sin\theta\langle x,1| + \cos\theta\langle 2,y|)I\otimes|1\rangle\langle 1|(\sin\theta|x,1\rangle + \cos\theta|y,2\rangle) \\ &= \sin^2\theta\langle x|I|x\rangle\langle 1|1\rangle\langle 1|1\rangle \\ &= \sin^2\theta.\end{aligned}$$

De même Prob(2)=$\langle\psi|P_2|\psi\rangle = \cos^2\theta$.

3. Après la deuxième lame biréfringente l'état est $|\theta,1\rangle$ cas elle agit de façon symétrique par rapport à la première (renversement du temps). On peut oublier le degré de liberté de trajectoire, et représenter l'état par $|\theta\rangle = \sin\theta|x\rangle + \cos\theta|y\rangle$.

La probabilité de détection est égale à Prob ($|\alpha\rangle$)= $|\langle\alpha|\theta\rangle|^2 = \cos^2(\theta-\alpha)$.

4. Si on "remplace le photon par un particule classique" :

- avec probabilité $\sin^2\theta$ il passe par la trajectoire inférieure et sa polarisation est horizontale $|x\rangle$. Donc après la deuxième lame biréfrégente son état est $|x\rangle$ et la probabilité de détection est $|\langle\alpha|x\rangle|^2 = \sin^2\alpha$. La probabilité totale de cet événement est $\sin^2\theta\sin^2\alpha$.

- avec probabilité $\cos^2\theta$ il passe par la trajectoire supérieure est sa polarisation est verticale $|y\rangle$. Donc après la deuxiéme lame biréfrégente son état est $|y\rangle$ et la probabilité de détection est $|\langle\alpha|y\rangle|^2 = \cos^2\alpha$. La probabilité totale de l'évènement est $\cos^2\theta\cos^2\alpha$.

Finalement on obtient :

$$\text{Prob détection} = \sin^2\theta\sin^2\alpha + \cos^2\theta\cos^2\alpha$$

La grande différence avec la MQ est que le terme d'interférence est absent.
Remarque : Ce terme d'interférence est obtenu en développant le résultat quantique (de la question 3)

$$\cos^2(\theta-\alpha) = \sin^2\theta\sin^2\alpha + \cos^2\theta\cos^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\theta\sin\alpha\sin\theta$$

Il s'agit du dernier terme.

Exercice 2 *Polarisation et inégalité de Heisenberg*

1.
$$|\Psi\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + e^{i\phi}\sin\theta\,|y\rangle$$

$$|\alpha\rangle = \cos\alpha\,|x\rangle + \sin\alpha\,|y\rangle$$

La probabilité de détection est

$$\begin{aligned}
\text{Prob}\,(p_\alpha = +1) &= |\langle\alpha\,|\Psi\rangle\,|^2 \\
&= |\cos\theta\cos\alpha + e^{i\phi}\sin\theta\sin\alpha|^2 \\
&= |\cos\theta\cos\alpha + \cos\phi\sin\theta\sin\alpha + i\sin\phi\sin\theta\sin\alpha|^2 \\
&= (\cos\theta\cos\alpha + \cos\phi\sin\theta\sin\alpha)^2 + (\sin\phi\sin\theta\sin\alpha)^2 \\
&= \cos^2\theta\cos^2\alpha + (\cos^2\phi + \sin^2\phi)\sin^2\theta\sin^2\alpha + 2\cos\phi\cos\alpha\cos\theta\sin\theta\sin\alpha \\
&= (\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha)^2 + 2(\cos\phi - 1)\cos\alpha\cos\theta\sin\theta\sin\alpha
\end{aligned}$$

Notez que

$$\begin{aligned}
2\cos\alpha\cos\theta\sin\theta\sin\alpha &= \frac{1}{2}(\cos(\theta+\alpha) + \cos(\theta-\alpha))(\cos(\theta-\alpha) - \cos(\theta+\alpha)) \\
&= \frac{1}{2}(\cos^2(\theta-\alpha) - \cos^2(\theta+\alpha))
\end{aligned}$$

et que

$$\cos\phi - 1 = -2\sin^2\frac{\phi}{2}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) &= (\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha)^2 + 2(\cos\phi - 1)\cos\alpha\cos\theta\sin\theta\sin\alpha \\
&= \cos^2(\theta-\alpha) - \sin^2\frac{\phi}{2}(\cos^2(\theta-\alpha) - \cos^2(\theta+\alpha)) \\
&= \cos^2(\theta-\alpha)\cos^2\frac{\phi}{2} + \cos^2(\theta+\alpha)\sin^2\frac{\phi}{2}
\end{aligned}$$

Pour la seconde probabilité on a

$$\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = -1) = 1 - \mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) = 1 - \cos^2(\theta-\alpha)\cos^2\frac{\phi}{2} + \cos^2(\theta+\alpha)\sin^2\frac{\phi}{2}$$

2. Pour l'analyseur avec un angle α, l'espérance est

$$\begin{aligned}
\mathrm{Esp}\,[p_\alpha] &= +1\cdot\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) + (-1)\,\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = -1) \\
&= \mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) - 1(1 - \mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1)) \\
&= 2\,\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) - 1
\end{aligned}$$

et la variance est

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}\,[p_\alpha] &= \mathrm{Esp}^2\,[p_\alpha] - (\mathrm{Esp}\,[p_\alpha])^2 \\
&= 1 - (\mathrm{Esp}\,[p_\alpha])^2 \\
&= 1 - (\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1))^2 \\
&= 4\,\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1)\,(1 - \mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1))
\end{aligned}$$

Pour l'analyseur avec un angle β, l'espérance et la variance sont

$$\mathrm{Esp}\,[p_\beta] = 2\,\mathrm{Prob}\,(p_\beta = +1) - 1$$

$$\mathrm{Var}\,[p_\beta] = 4\,\mathrm{Prob}\,(p_\beta = +1)\,(1 - \mathrm{Prob}\,(p_\beta = +1))$$

3. Pour $\varphi = \alpha$ notez que

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi| P_\alpha |\Psi\rangle &= \langle\Psi |\alpha\rangle \langle\alpha |\Psi\rangle - \langle\Psi |\alpha_\perp\rangle \langle\alpha_\perp |\Psi\rangle \\
&= |\langle\alpha |\Psi\rangle|^2 - |\langle\alpha_\perp |\Psi\rangle|^2 \\
&= 2\,|\langle\alpha |\Psi\rangle|^2 - 1 \\
&= 2\,\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) - 1 \\
&= \mathrm{Esp}\,[p_\alpha]
\end{aligned}
$$

Notez aussi que

$$
\langle\Psi| P_\alpha^2 |\Psi\rangle = 1
$$

et finalement

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi| P_\alpha^2 |\Psi\rangle - \langle\Psi| P_\alpha |\Psi\rangle^2 &= 1 - (\mathrm{Exp}\,[p_\alpha])^2 \\
&= \left(\mathrm{Exp}\left[p_\alpha^2\right]\right) - (\mathrm{Exp}\,[p_\alpha])^2 \\
&= \mathrm{Var}\,[p_\alpha]
\end{aligned}
$$

Pour $\varphi = \beta$ les égalités sont les mêmes.

4. On peut réécrire le projecteur comme

$$
\begin{aligned}
P_\alpha &= |\alpha\rangle\langle\alpha| - |\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp| \\
&= \cos^2\alpha\,|x\rangle\langle x| + \sin^2\alpha\,|y\rangle\langle y| + \cos\alpha\sin\alpha\,(|x\rangle\langle y| + |y\rangle\langle x|) \\
&\quad - \sin^2\alpha\,|x\rangle\langle x| - \cos^2\alpha\,|y\rangle\langle y| + \cos\alpha\sin\alpha\,(|x\rangle\langle y| + |y\rangle\langle x|) \\
&= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\,(|x\rangle\langle x| - |y\rangle\langle y|) \\
&\quad + 2\sin\alpha\cos\alpha\,(|x\rangle\langle y| + |y\rangle\langle x|) \\
&= \cos 2\alpha\cdot\sigma_z + \sin 2\alpha\cdot\sigma_x
\end{aligned}
$$

Le commutateur devient

$$
\begin{aligned}
[P_\alpha, P_\beta] &= P_\alpha P_\beta - P_\beta P_\alpha \\
&= \cos 2\alpha\cos 2\beta\cdot\sigma_z^2 + \sin 2\alpha\cos 2\beta\cdot\sigma_x\sigma_z \\
&\quad + \sin 2\beta\cos 2\alpha\cdot\sigma_z\sigma_x + \sin 2\alpha\sin 2\beta\cdot\sigma_x^2 \\
&\quad - \cos 2\alpha\cos 2\beta\cdot\sigma_z^2 - \sin 2\alpha\cos 2\beta\cdot\sigma_z\sigma_x \\
&\quad - \sin 2\beta\cos 2\alpha\cdot\sigma_x\sigma_z - \sin 2\alpha\sin 2\beta\cdot\sigma_x^2 \\
&= \sin 2\alpha\cos 2\beta[\sigma_x, \sigma_z] \\
&\quad + \sin 2\beta\cos 2\alpha[\sigma_z, \sigma_x] \\
&= (\sin 2\beta\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos 2\beta)[\sigma_z, \sigma_x] \\
&= \sin(2(\beta - \alpha))[\sigma_z, \sigma_x] \\
&= \sin(2(\beta - \alpha))\,(|x\rangle\langle y| - |y\rangle\langle x|)
\end{aligned}
$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|\langle\Psi|\,[P_\alpha,P_\beta]\,|\Psi\rangle| &= \sin(2(\beta-\alpha))\,|\langle\Psi|\,(|x\rangle\,\langle y|-|y\rangle\,\langle x|)\,|\Psi\rangle| \\
&= \sin(2(\beta-\alpha))|\sin\theta\cos\theta e^{-i\phi}-\sin\theta\cos\theta e^{i\phi}| \\
&= \sin(2(\beta-\alpha))|\sin\theta\cos\theta(e^{-i\phi}-e^{i\phi})| \\
&= \sin(2(\beta-\alpha))2\sin\phi\sin\theta\cos\theta \\
&= \sin(2(\beta-\alpha))\sin\phi\sin 2\theta
\end{aligned}$$

L'inégalité de Heisenberg est :

$$4\sqrt{\mathrm{Prob}\,(p_\alpha=+1)\,(1-\mathrm{Prob}\,(p_\alpha=+1))}\sqrt{\mathrm{Prob}\,(p_\beta=+1)\,(1-\mathrm{Prob}\,(p_\beta=+1))}$$

$$\geq \frac{1}{2}\sin(2(\beta-\alpha))\sin\phi\sin 2\theta$$

(a) En particulier pour $\theta=\frac{\pi}{4}$, $\alpha=0$ et $\beta=\frac{\pi}{2}$ on a :

$$\mathrm{Prob}\,(p_\alpha)=\cos^2(\frac{\pi}{4})(\cos^2\frac{\phi}{2}+\sin^2\frac{\phi}{2})=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Prob}\,(p_\beta)=\cos^2(-\frac{\pi}{4})\cos^2\frac{\phi}{2}+\cos^2(\frac{3\pi}{4})\sin^2\frac{\phi}{2}=\frac{1}{2}$$

$$\Delta P_\alpha=\Delta P_\beta=\sqrt{4\,\mathrm{Prob}\,(p_\alpha=+1)\,(1-\mathrm{Prob}\,(p_\alpha=+1))}=1$$

$$\Delta P_\alpha\Delta P_\beta=1$$

$$\frac{1}{2}\,|\langle\Psi|\,[P_\alpha,P_\beta]\,|\Psi\rangle|=\frac{1}{2}\sin\pi\sin\phi\sin\frac{\pi}{2}=0$$

$$1\geq 0$$

L'inégalité est satisfaite.

(b) Pour $\theta=\frac{\pi}{4}$, $\alpha=0$ et $\beta=\frac{\pi}{4}$ on a :

$$\mathrm{Prob}\,(p_\alpha)=\frac{1}{2}$$

$$\mathrm{Prob}\,(p_\beta)=\cos^2(0)\cos^2\frac{\phi}{2}+\cos^2(\frac{\pi}{2})\sin^2\frac{\phi}{2}=\cos^2\frac{\phi}{2}$$

$$\Delta P_\alpha=1$$

$$\Delta P_\beta=\sqrt{4\cos^2\frac{\phi}{2}(1-\cos^2\frac{\phi}{2})}=|\sin\phi|$$

$$\Delta P_\alpha \Delta P_\beta = |\sin\phi|$$

$$\frac{1}{2}\left|\langle\Psi|\left[P_\alpha, P_\beta\right]|\Psi\rangle\right| = \frac{1}{2}|\sin\frac{\pi}{2}\sin\phi\sin\frac{\pi}{2}| = \frac{1}{2}|\sin\phi|$$

$$|\sin\phi| \geq \frac{1}{2}|\sin\phi|$$

L'inégalité est satisfaite.

(c) Pour $\theta = \frac{\pi}{4}$, $\alpha = 0$ et $\beta = \frac{\pi}{6}$ on a :

$$\mathrm{Prob}\,(p_\alpha) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}\,(p_\beta) &= \cos^2(\frac{\pi}{12})\cos^2\frac{\phi}{2} + \cos^2(\frac{5\pi}{12})\sin^2\frac{\phi}{2} \\
&= \frac{1}{2}(\frac{\sqrt{3}}{2}+1)\cos^2\frac{\phi}{2} + \frac{1}{2}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+1)\sin^2\frac{\phi}{2} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}(\cos^2\frac{\phi}{2} - \sin^2\frac{\phi}{2}) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\cos\phi
\end{aligned}$$

$$\Delta P_\alpha = 1$$

$$\Delta P_\beta = \sqrt{4\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\phi\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}\cos\phi\right)} = \sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2\phi}$$

$$\Delta P_\alpha \Delta P_\beta = \sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2\phi}$$

$$\frac{1}{2}\left|\langle\Psi|\left[P_\alpha, P_\beta\right]|\Psi\rangle\right| = \frac{1}{2}|\sin\frac{\pi}{3}\sin\phi\sin\frac{\pi}{2}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\sin\phi|$$

Il faut justifier :

$$\sqrt{1-\frac{3}{4}\cos^2\phi} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}|\sin\phi|$$

Notez que cette inégalité est équivalente à

$$1-\frac{3}{4}\cos^2\phi \geq \frac{3}{4}\sin^2\phi$$

qui est équivalente à

$$1 \geq \frac{3}{4}$$