Traitement quantique de l'information II — EPFL Semestre de printemps 2012
Dr. Nicolas Macris — 2 Mars 2012

Série 2
Traitement quantique de l'information II

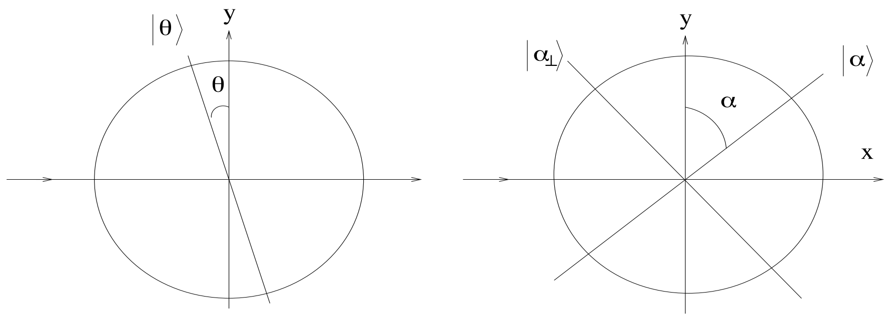
Exercice 1 *Photons et particules classiques*

On rappelle qu'un photon se propageant dans la direction z possède deux degrés de liberté de polarisation $|x\rangle$ et $|y\rangle$ appelés polarisation horizontale et verticale.

1. Un polariseur linéaire d'angle θ prépare les photons dans l'état $|\theta\rangle = \sin\theta\,|x\rangle + \cos\theta\,|y\rangle$. Un analyseur d'angle α projette un photon sur l'état $|\alpha\rangle$ ou $|\alpha_\perp\rangle$ avec probabilité $|\langle\alpha|\theta\rangle|^2$ et $|\langle\alpha_\perp|\theta\rangle|^2$. Ici

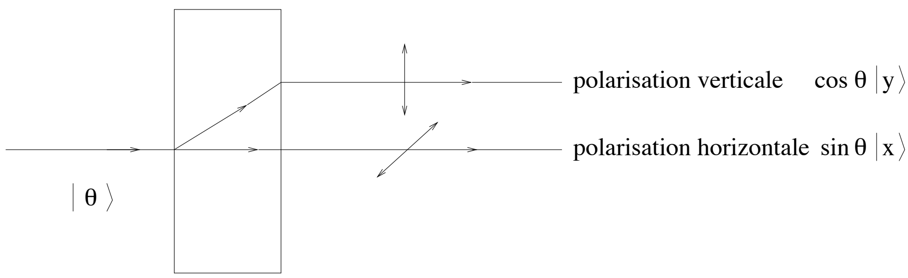
$$|\alpha\rangle = \sin\alpha\,|x\rangle + \cos\alpha\,|y\rangle$$
$$|\alpha_\perp\rangle = -\cos\alpha\,|x\rangle + \sin\alpha\,|y\rangle$$

   Calculez la probabilité $|\langle\alpha|\theta\rangle|^2$ et $|\langle\alpha_\perp|\theta\rangle|^2$.

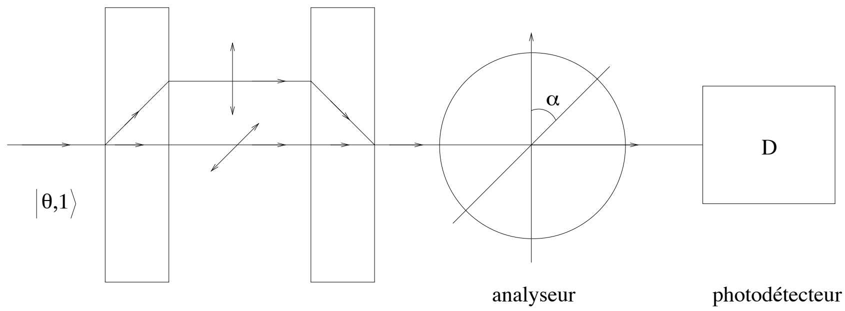


(polariseur) (analyseur)

2. Une lame biréfringente décompose un faisceaux en deux, suivant la polarisation. Quelle est la probabilité d'observer le photon sur la trajectoire 1 ? et sur 2 ? (On suppose que l'on a placé deux photodétecteurs sur ces trajectoires).



3. On place maintenant une deuxième lame biréfringente symétrique. Quel est l'état du photon après la deuxième lame ? (avant la mesure). Calculer la probabilité de détection dans l'appareil de mesure et montrer qu'elle vaut $\cos^2(\theta - \alpha)$.



4. On veut maintenant calculer cette dernière probabilité en imaginant que l'on envoie une "particule classique" à la place du photon (p. ex. une balle de fusil ou une boule de canon). On admettra que lors du passage dans la première lame biréfringente le photon a une probabilité $\sin^2\theta$ d'emprunter la trajectoire 1 et une probabilité $\cos^2\theta$ d'emprunter la trajectoire 2 (si vous avez répondu à la question 2 ceci devrait paraître naturel). De plus on admet qu'une "particule polarisée" selon x a une probabilité $\sin^2\alpha$ de traverser l'analyseur et une "particule polarisée" selon y a une probabilité $\cos^2 a$ de traverser l'analyseur.

   Etant donné ces hypothèses calculer la probabilité de détecter la particule dans le photodétecteur et montrer qu'elle vaut $\left(\cos^2\theta\cos^2 a+\sin^2\theta\sin^2\alpha\right)$. Comparez au résultat quantique et commentez.

Exercice 2 *Polarisation et inégalité de Heisenberg*

On suppose que l'on envoie des photons préparés dans l'état $|\Psi\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + e^{i\phi}\sin\theta\,|y\rangle$. On va ensuite les observer avec un détecteur placé juste après un analyseur. On a à disposition deux analyseurs différents : le premier ayant un angle α et le second un angle β. Pour l'analyseur α on enregistre le nombre $p_\alpha = \pm1$ suivant que l'on détecte un photon ou non. Il en est de même avec le détecteur β et le nombre p_β.

1. Calculez la probabilité de détection et de non-détection pour les deux analyseurs : $\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = \pm1)$ et $\mathrm{Prob}\,(p_\beta = \pm1)$.
2. Calculez l'espérance et la variance de la variable aléatoire p_α et p_β.
3. Considerez à présent les observables $P_\alpha = (+1)\,|\alpha\rangle\langle\alpha| + (-1)\,|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|$ et $P_\beta = (+1)\,|\beta\rangle\langle\beta| + (-1)\,|\beta_\perp\rangle\langle\beta_\perp|$. Vérifiez que l'espérance et la variance trouvée au point précédent sont donnée par

$$\mathrm{Exp}\,[p_\varphi] = \langle\Psi|\,P_\varphi\,|\Psi\rangle \ \text{ et } \ \mathrm{Var}\,[p_\varphi] = \langle\Psi|\,P_\varphi^2\,|\Psi\rangle - \langle\Psi|\,P_\varphi\,|\Psi\rangle^2$$

   où $\varphi = \alpha,\, \beta$.

4. Calculez le commutateur $[P_\alpha, P_\beta] = P_\alpha P_\beta - P_\beta P_\alpha$ et calculez les deux membres de l'inégalité de Heisenberg

$$\Delta P_\alpha \Delta P_\beta \geq \frac{1}{2}\left|\langle\Psi|\,[P_\alpha, P_\beta]\,|\Psi\rangle\right|$$

   où $\Delta P_\varphi = \sqrt{\mathrm{Var}\,(p_\varphi)}$. Vérifiez l'inégalité dans les cas particuliers $\theta = \frac{\pi}{4}$, ϕ quelconque, $\alpha = 0$ et pour $\beta = \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}$.