Solution de la série 10
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Refocusing*

$$\begin{aligned}
e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}}|\psi_0\rangle &= e^{-itJ\sigma_1^z\otimes\sigma_2^z}\cdot\frac{1}{2}\left(|{\uparrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle + |{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\downarrow\downarrow}\rangle\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(e^{-itJ}|{\uparrow\uparrow}\rangle - e^{itJ}|{\uparrow\downarrow}\rangle + e^{itJ}|{\downarrow\uparrow}\rangle - e^{-itJ}|{\downarrow\downarrow}\rangle\right)\\
&= \frac{e^{-itJ}}{2}\left(|{\uparrow\uparrow}\rangle - e^{2itJ}|{\uparrow\downarrow}\rangle + e^{2itJ}|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\downarrow\downarrow}\rangle\right)
\end{aligned}$$

1. Pour $t = \frac{\pi}{4J}$ on a $e^{2itJ} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i$
   $\Rightarrow |\psi_\tau\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2}\left(|{\uparrow\uparrow}\rangle - i\,|{\uparrow\downarrow}\rangle + i\,|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\downarrow\downarrow}\rangle\right)$.
2. Supposons que l'état puisse s'écrire
   $(\alpha\,|{\uparrow}\rangle + \beta\,|{\downarrow}\rangle)\otimes(\gamma\,|{\uparrow}\rangle + \delta\,|{\downarrow}\rangle) = \alpha\gamma\,|{\uparrow\uparrow}\rangle + \alpha\delta\,|{\uparrow\downarrow}\rangle + \beta\gamma\,|{\downarrow\uparrow}\rangle + \beta\delta\,|{\downarrow\downarrow}\rangle$,
   alors $\alpha\gamma = 1,\ \alpha\delta = -i,\ \beta\gamma = i,\ \beta\delta = -1$.
   On peut toujours poser $\alpha = 1$ (phase globale). Donc $\gamma = 1,\ \delta = -i,\ \beta = i$ et $\delta = i \Rightarrow$ contradiction sur δ.
3. Pour $\frac{\tau}{2} = \frac{\pi}{8J}$ on a $e^{2itJ} = e^{\frac{i\pi}{4}}$.
   $|\psi_{\tau/2}\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{2}\left(|{\uparrow\uparrow}\rangle - e^{\frac{i\pi}{4}}|{\uparrow\downarrow}\rangle + e^{\frac{i\pi}{4}}|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\downarrow\downarrow}\rangle\right)$.
   $(R_1\otimes\mathbb{I}_2)\,|\psi_{\tau/2}\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{8}}}{2}\left(|{\downarrow\uparrow}\rangle - e^{\frac{i\pi}{4}}|{\downarrow\downarrow}\rangle + e^{\frac{i\pi}{4}}|{\uparrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle\right)$
   on laisse evoluer pendant $\tau/2$ à nouveau
   $\rightarrow \frac{1}{2}\left(|{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\downarrow\downarrow}\rangle + |{\uparrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle\right)$
   Après une dernière rotation $\rightarrow \frac{1}{2}\left(|{\uparrow\uparrow}\rangle - |{\uparrow\downarrow}\rangle + |{\downarrow\uparrow}\rangle - |{\downarrow\downarrow}\rangle\right)$.
   On remarque que
   $U_{tot}\,|\psi_0\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)\otimes(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)\,|\psi_0\rangle$!
4. $(R_1\otimes\mathbb{I}_2) = \sigma_1^x\otimes\mathbb{I}_2 = \begin{pmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}$
   $$e^{-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}} = e^{-itJ\sigma_1^z\otimes\sigma_2^z} = \begin{pmatrix}e^{-itJ}&0&0&0\\0&e^{itJ}&0&0\\0&0&e^{itJ}&0\\0&0&0&e^{-itJ}\end{pmatrix}$$
   Faire la multiplication des matrices.

5. $J << 1$. Donc $\tau = \frac{\pi}{4J} >> \pi$. Les π-pulses sont beaucoup plus rapides que l'évolution des spins nucleaires. L'idée est que en injectant deux π-pulses aux instants $\frac{\tau}{2}$ et τ on reforme l'état initial et donc tout se passe comme si les deux spins n'avaient pas évolué.