

Série 9 Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Interféromètre de Mach-Zehnder dans le langage des circuits.*

Reprenez l'interféromètre de Mach-Zehnder avec 2 miroirs semi-transparents et deux miroirs parfaitement réfléchissant. Représentez le circuit quantique correspondant.

Exercice 2 *Production des états de Bell*

Nous avons vu dans une série précédente que

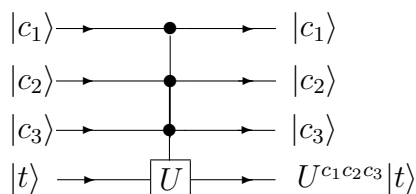
$$|B_{xy}\rangle = (CNOT)(H \otimes I)|x\rangle \otimes |y\rangle$$

ou $x, y \in \{0, 1\}$ et $|B_{xy}\rangle$ sont les états de Bell. Représentez le circuit correspondant à cette identité. Représentez le circuit correspondant à l'identité inverse :

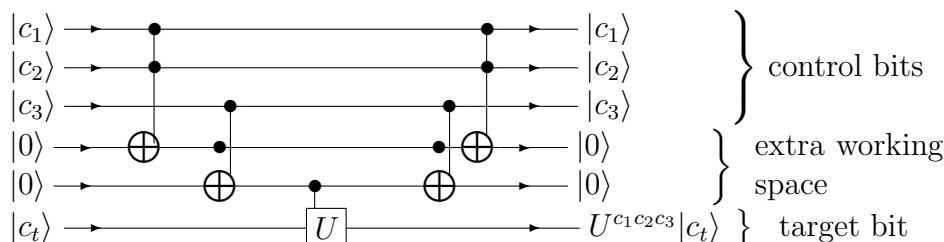
$$|x\rangle \otimes |y\rangle = (H \otimes I)(CNOT)|B_{xy}\rangle$$

Exercice 3 *Construction d'une porte multi-contrôle-U.*

Vérifiez que la porte multi-contrôle-U



peut être réalisée à l'aide de la porte de Toffoli (control-control-NOT) et d'un simple control-U.



Exercice 4 *Algorithme de Deutsch et Josza le plus simple possible*

On considère une fonction d'un bit classique $f(x)$ qui prend ses valeurs dans $\{0, 1\}$. Il existe 4 fonctions de ce type. On veut déterminer si la fonction est constante ou équilibrée (il y a deux fonctions constantes et deux fonctions équilibrées). Avec un "circuit classique" pour déterminer si f est constante ou équilibrée il faut calculer les deux sorties possibles $f(0)$ et $f(1)$ puis les comparer (par exemple on calcule $f(0) - f(1)$ et on détermine si cette différence vaut 0 ou 1). On doit "appeler" la fonction f deux fois.

On suppose que l'on a à disposition une porte quantique qui effectue l'opération

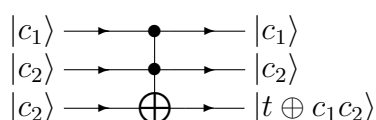
$$U_f|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle$$

Montrez que U_f est une matrice unitaire.

Reprenez le circuit de Deutsch et Josza du cours et refaites l'analyse détaillée dans ce cas particulier. Montrez en particulier qu'une seule utilisation de U_f suffit à déterminer si f est constante ou équilibrée.

Exercice 5 Facultatif : *Construction de la porte de Toffoli à partir du control-NOT (Indication : calcul long).*

Vérifiez que la porte control-control-NOT aussi appelée porte de Toffoli :



est équivalente au circuit suivant fabriqué uniquement avec les portes CNOT, H, T et S

