
Solution de la série 8
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Algorithme de Grover pour $N = 4$*

1. On peut toujours trouver la réponse en maximum 3 questions. En effet lors de la 3ème question si on n'a pas encore présenté à l'oracle la bonne entrée, alors on sait que la dernière entrée restante est la bonne. Donc il y a 3 événements :

- trouver X_0 en 1 question ; $\text{prob} = \frac{1}{4}$.
- trouver X_0 en 2 questions ; $\text{prob} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$.
- trouver X_0 en 3 questions ; $\text{prob} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{4}$.

Le nombre moyen de questions est :

$$\frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} = 2 + \frac{1}{4} = 2.25.$$

2. En regardant la théorie on voit qu'une question suffit !
3. L'entrée $|00\rangle$ est envoyée sur

$$\begin{aligned} |00\rangle &\rightarrow |11\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |11\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|11\rangle - |10\rangle) \\ &\rightarrow \frac{1}{2}(|10\rangle - |11\rangle - |10\rangle - |11\rangle) = -|11\rangle \\ &\rightarrow -|00\rangle. \end{aligned}$$

l'entrée $|10\rangle$ est envoyée sur

$$\begin{aligned} |10\rangle &\rightarrow |01\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |01\rangle) \\ &\rightarrow \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle - |00\rangle + |01\rangle) = |01\rangle \rightarrow |10\rangle. \end{aligned}$$

et on vérifie aussi $|01\rangle \rightarrow |01\rangle$ et $|11\rangle \rightarrow |11\rangle$.

4. Etapes de l'algorithme : On suppose $X_0 = 00$ sans perte de généralité.

(a) État initial $|001\rangle$.

(b) $H^{\otimes 3}|001\rangle = \frac{1}{(\sqrt{2})^3}(|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$.

(c) Après l'oracle :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \{ |00\rangle \otimes (|f(00)\rangle - |\overline{f(00)}\rangle) \\ & \quad + |01\rangle \otimes (|f(01)\rangle - |\overline{f(01)}\rangle) \\ & \quad + |10\rangle \otimes (|f(10)\rangle - |\overline{f(10)}\rangle) \\ & \quad + |11\rangle \otimes (|f(11)\rangle - |\overline{f(11)}\rangle) \}. \end{aligned}$$

Puisque $f(00) = 1$ et $f(01) = f(10) = f(11) = 0$ on trouve :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \{ |00\rangle \otimes (|1\rangle - |0\rangle) \\ & \quad + |01\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\ & \quad + |10\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\ & \quad + |11\rangle \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \}. \\ & = \frac{1}{(\sqrt{2})^3} \{ -|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle \} \otimes (|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned}$$

Notez que la future solution est "marquée par la phase -1 ". C'est le fameux phénomène de "kick back phase".

Maintenant on applique $H^{\otimes 2}$ au premier registre. Cela donne :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\sqrt{2})^5} \{ -|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle \\ & \quad + |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \\ & \quad + |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle \\ & \quad + |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle \} \otimes (|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned}$$

On applique le changement de signe conditionnel : uniquement $|00\rangle$ change de signe :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(\sqrt{2})^5} \{ +|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle \\ & \quad - |00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle \\ & \quad - |00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle \\ & \quad - |00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle \} \otimes (|0\rangle - |1\rangle). \end{aligned}$$

Peut-être qu'une bonne idée est de procéder à des simplifications avant de continuer. Cela donne :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{(\sqrt{2})^5} \{-2|00\rangle - 2|01\rangle - 2|10\rangle - 2|11\rangle\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&= -\frac{1}{(\sqrt{2})^3} \{+|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle\} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \underbrace{(H^{\otimes 2}|00\rangle)}_{\hat{O} \text{ surprise!}} \otimes (|0\rangle - |1\rangle) = -H^{\otimes 3}(|001\rangle).
\end{aligned}$$

Maintenant on applique la dernière série de portes de Hadamard $H^{\otimes 3}$. Puisque $H^2 = 1$ on trouve l'état final $-|00\rangle \otimes |1\rangle$. La mesure du premier registre donne $X_0 = 00$ avec probabilité 1.

Exercice 2 *Identité utile pour la réalisation expérimentale de la porte CNOT par RMN*

- $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ est diagonale donc

$$R_1 = R_2 = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix} = e^{-i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

- La porte de Hadamard est comme d'habitude $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

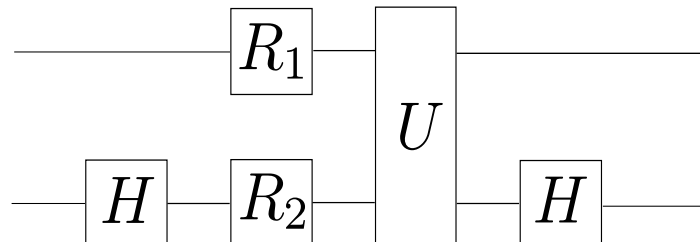
- Pour l'Hamiltonien on a :

$$\mathcal{H} = \hbar J \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \hbar J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Si on laisse évoluer pendant un temps $t = \frac{\pi}{4J}$ on trouve

$$\begin{aligned}
U = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}\right) &= \exp\left(-\frac{i\pi}{4J\hbar}\mathcal{H}\right) = \begin{pmatrix} \exp(-i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \exp(i\frac{\pi}{4}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \exp(-i\frac{\pi}{4}) \end{pmatrix}, \\
\Rightarrow U &= \exp\left(-i\frac{\pi}{4}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Le produit des matrices correspond au circuit suivant :



Sur le dessin l'état $|\psi\rangle$ entre par la gauche et la sortie est à droite

$$(I_{2 \times 2} \otimes H)U(R_1 \otimes R_2)(I_{2 \times 2} \otimes H)|\psi\rangle.$$

Calculons le produit :

$$\begin{aligned} R_1 \otimes R_2 &= e^{-i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\frac{\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U(R_1 \otimes R_2) &= e^{-i\frac{3\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\frac{3\pi}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

D'autre part

$$I_{2 \times 2} \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right)$$

et

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right),$$

puis

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right) = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right),$$

finalemt on trouve

$$(I_{2 \times 2} \otimes H)U(R_1 \otimes R_2)(I_{2 \times 2} \otimes H) = e^{-i\frac{3\pi}{4}} \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Cette matrice est égale à

$$\begin{aligned} & e^{-i\frac{3\pi}{4}} \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \\ &= e^{-i\frac{3\pi}{4}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \sigma_x - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{1} \right\} \\ &= e^{-i\frac{3\pi}{4}} \{-|0\rangle\langle 0| \otimes \sigma_x + |1\rangle\langle 1| \otimes \mathbf{1}\}. \end{aligned}$$

Cette operation est une sorte de CNOT (mais par le CNOT standard).

Remarque : Pour obtenir la porte CNOT standard il faut utiliser des rotations avec un autre signe (c.a.d d'angle opposé) :

$$R_1 = \exp(+i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1^z}{2}) \text{ et } R_2 = \exp(+i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_2^z}{2}).$$

On obtient alors (si on ne fait pas d'erreurs de signes!)

$$\begin{aligned} (I_{2 \times 2} \otimes H)U(R_1 \otimes R_2)(I_{2 \times 2} \otimes H) &= e^{i\frac{3\pi}{4}} \{|0\rangle\langle 0| \otimes \mathbf{1} + |1\rangle\langle 1| \otimes \sigma_x\} \\ &= e^{i\frac{3\pi}{4}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ 1 & 0 & | & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & | & 0 & 1 \\ 0 & 0 & | & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{CNOT standard}} \end{aligned}$$