

## Série 8 Traitement Quantique de l'Information

**Exercice 1** *Interféromètre de Mach-Zehnder dans le langage des circuits.*

Reprenez l'interféromètre de Mach-Zehnder avec 2 miroirs semi-transparents et deux miroirs parfaitement réfléchissant. Représentez le circuit quantique correspondant.

**Exercice 2** *Production des états de Bell*

Nous avons vu dans une série précédente que

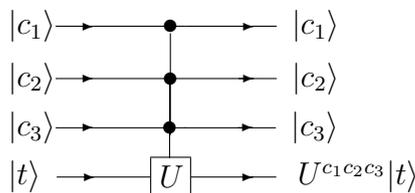
$$|B_{xy}\rangle = (CNOT)(H \otimes I)|x\rangle \otimes |y\rangle$$

ou  $x, y \in \{0, 1\}$  et  $|B_{xy}\rangle$  sont les états de Bell. Représentez le circuit correspondant à cette identité. Représentez le circuit correspondant à l'identité inverse :

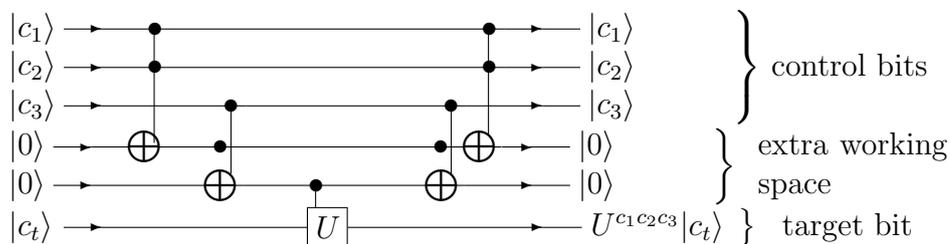
$$|x\rangle \otimes |y\rangle = (H \otimes I)(CNOT)|B_{xy}\rangle$$

**Exercice 3** *Construction d'une porte multi-contrôle-U.*

Vérifiez que la porte multi-contrôle-U

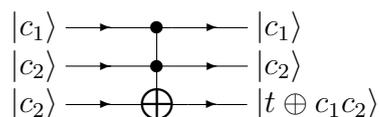


peut être réalisée à l'aide de la porte de Toffoli (control-control-NOT) et d'un simple control-U.

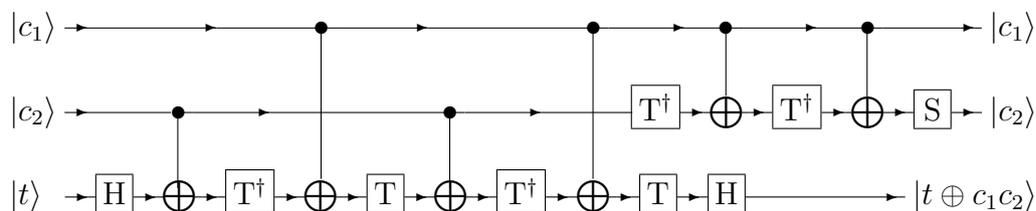


**Exercice 4** Construction de la porte de Toffoli à partir du control-NOT

Vérifiez que la porte control-control-NOT aussi appelée porte de Toffoli :



est équivalente au circuit suivant fabriqué uniquement avec les portes CNOT, H, T et S



**Exercice 5** Algorithme de Deutsch et Josza le plus simple possible

On considère une fonction d'un bit classique  $f(x)$  qui prend ses valeurs dans  $\{0, 1\}$ . Il existe 4 fonctions de ce type. On veut déterminer si la fonction est constante ou balancée (il y a deux fonctions constantes et deux fonctions balancées). Avec un "circuit classique" pour déterminer si  $f$  est constante ou balancée il faut calculer les deux sorties possibles  $f(0)$  et  $f(1)$  puis les comparer (par exemple on calcule  $f(0) - f(1)$  et on détermine si cette différence vaut 0 ou 1). On doit "appeler" la fonction  $f$  deux fois.

On suppose que l'on a disposition une porte quantique qui effectue l'opération

$$U_f|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus f(x)\rangle$$

Montrez que  $U_f$  est une matrice unitaire.

Reprenez le circuit de Deutsch et Josza du cours et refaites l'analyse détaillée dans ce cas particulier. Montrez en particulier qu'une seule utilisation de  $U_f$  suffit à déterminer si  $f$  est constante ou balancée.