
Solution de la série 8
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Interféromètre de Mach-Zehnder dans le langage des circuits*

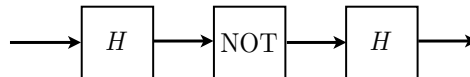
Le schéma de l'interféromètre de Mach-Zehnder peut être trouvé dans une des séries précédentes. Les miroirs semi-transparent sont modélisés par une porte de Hadamard

$$H|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + |v\rangle)$$
$$H|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle - |v\rangle)$$

Les miroirs réfléchissants sont modélisés par une porte NOT (ou X)

$$NOT|h\rangle = |v\rangle$$
$$NOT|v\rangle = |h\rangle$$

L'interféromètre correspond donc au circuit



Si le photon entre dans l'état initial $\alpha|h\rangle + \beta|v\rangle$, alors à la sortie juste avant les détecteurs son état est

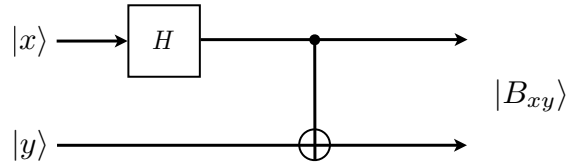
$$H(NOT)H(\alpha|h\rangle + \beta|v\rangle)$$

Exercice 2 *Production des états de Bell*

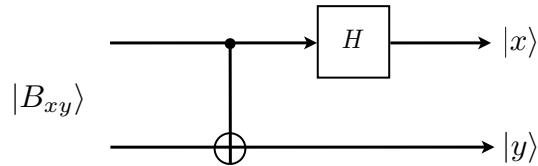
Le circuit correspondant à l'identité

$$|B_{xy}\rangle = (CNOT)(H \otimes I)|x\rangle \otimes |y\rangle$$

implique deux qubits. Le schéma est :



L'identité inverse est représentée par :



Notez que pour un état produit tel que $|x\rangle \otimes |y\rangle$ on peut distribuer les *états des qubits* sur chaque "fil". Pour les états intriqués tels que $|B_{xy}\rangle$ on ne peut pas distribuer l'état sur chaque fil séparément. Néanmoins, il y a toujours une "particule" (où un degré de liberté où un qubit par fil).

Exercice 3 Construction d'une porte multi-contrôle- U

On fait le calcul en calculant l'état après chaque tranche. L'état initial est

$$|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes |c_3\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |c_t\rangle$$

1. Après le premier (Control-Control-NOT)₁₂₄ on trouve l'état

$$|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes |c_3\rangle \otimes |c_1c_2\rangle \otimes |0\rangle \otimes |c_t\rangle$$

2. Après le deuxième (Control-Control-Not)₃₄₅ on trouve l'état

$$|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes |c_3\rangle \otimes |c_1c_2\rangle \otimes |c_3c_1c_2\rangle \otimes |c_t\rangle$$

3. Après le (Control-U)₅₆ qui agit sur le dernier qubit :

$$|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes |c_3\rangle \otimes |c_1c_2\rangle \otimes |c_3c_1c_2\rangle \otimes U^{c_3c_2c_1}|c_t\rangle$$

4. On vérifie ensuite que les deux derniers control-control-NOT reverse les opérations faites sur le 5ème et 4ème qubits.

Après (Control-Control-NOT)₃₄₅ on a

$$\begin{aligned} &|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes |c_3\rangle \otimes |c_1c_2\rangle \otimes |c_3c_1c_2 \oplus c_3c_1c_2\rangle \otimes U^{c_3c_2c_1}|c_t\rangle \\ &= |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes |c_3\rangle \otimes |c_1c_2\rangle \otimes |0\rangle \otimes U^{c_3c_2c_1}|c_t\rangle \end{aligned}$$

5. Et finalement après le dernier (Control-Control-Not)₁₂₄

$$\begin{aligned} & |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes |c_3\rangle \otimes |c_1c_2 \oplus c_1c_2\rangle \otimes |0\rangle \otimes U^{c_3c_2c_1}|c_t\rangle \\ & = |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes |c_3\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes U^{c_3c_2c_1}|c_t\rangle \end{aligned}$$

Exercice 4 Construction de la porte de Toffoli à partir du control-NOT

Ce calcul est fastidieux mais très instructif! Pour ne pas se tromper il faut faire attention de bien distinguer les sommes + et \oplus . On calcule l'état après chaque tranche.

1. Après (H)₃ :

$$|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \frac{|0\rangle + (-1)^t|1\rangle}{\sqrt{2}}$$

2. Après (CNOT)₂₃ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \{|c_2\rangle + (-1)^t|1 \oplus c_2\rangle\}$$

3. Après (T[†])₃ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \{e^{-i\frac{\pi}{4}c_2}|c_2\rangle + (-1)^te^{-i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_2)}|1 \oplus c_2\rangle\}$$

4. Après (CNOT)₁₃ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \{e^{-i\frac{\pi}{4}c_2}|c_1 \oplus c_2\rangle + (-1)^te^{-i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_2)}|1 \oplus c_1 \oplus c_2\rangle\}$$

5. Après (T)₃ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \{e^{-i\frac{\pi}{4}c_2+i\frac{\pi}{4}(c_1\oplus c_2)}|c_1 \oplus c_2\rangle + (-1)^te^{-i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_2)}e^{i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_1\oplus c_2)}|1 \oplus c_1 \oplus c_2\rangle\}$$

6. Après (CNOT)₂₃ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \{e^{-i\frac{\pi}{4}c_2+i\frac{\pi}{4}(c_1\oplus c_2)}|c_1\rangle + (-1)^te^{-i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_2)}e^{i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_1\oplus c_2)}|1 \oplus c_1\rangle\}$$

7. Après (T[†])₃ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \{e^{-i\frac{\pi}{4}c_2+i\frac{\pi}{4}(c_1\oplus c_2)}e^{-i\frac{\pi}{4}c_1}|c_1\rangle + (-1)^te^{-i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_2)}e^{i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_1\oplus c_2)}e^{-i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_1)}|1 \oplus c_1\rangle\}$$

8. Après (CNOT)₁₃ :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \{e^{-i\frac{\pi}{4}c_2+i\frac{\pi}{4}(c_1\oplus c_2)}e^{-i\frac{\pi}{4}c_1}|0\rangle + (-1)^te^{-i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_2)}e^{i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_1\oplus c_2)}e^{-i\frac{\pi}{4}(1\oplus c_1)}|1\rangle\}$$

9. Après $(T^\dagger)_2 \otimes (T)_3$:

$$e^{-i\frac{\pi}{4}c_2} \frac{1}{\sqrt{2}} |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \left\{ e^{-i\frac{\pi}{4}[c_2+c_1-(c_1\oplus c_2)]} |0\rangle + (-1)^t e^{-i\frac{\pi}{4}[1\oplus c_2-1\oplus c_1\oplus c_2+1\oplus c_1-1]} |1\rangle \right\}$$

10. Après $(CNOT)_{12} \otimes (H)_3$:

$$e^{-i\frac{\pi}{4}c_2} \frac{1}{\sqrt{2}} |c_1\rangle \otimes |c_2 \oplus c_1\rangle \otimes \left\{ e^{-i\frac{\pi}{4}[c_2+c_1-(c_1\oplus c_2)]} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + (-1)^t e^{-i\frac{\pi}{4}[1\oplus c_2-1\oplus c_1\oplus c_2+1\oplus c_1-1]} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right\}$$

11. Les portes restantes agissent seulement sur les qubits 1 et 2. L'état $|c_1\rangle \otimes |c_2 \oplus c_1\rangle$ devient :

Après $(T^\dagger)_2$:

$$e^{-i\frac{\pi}{4}(c_2\oplus c_1)} |c_1\rangle \otimes |c_2 \oplus c_1\rangle$$

12. Après $(CNOT)_{12}$:

$$e^{-i\frac{\pi}{4}(c_2\oplus c_1)} |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle$$

13. Après $(T)_1 \otimes (S)_2$:

$$e^{-i\frac{\pi}{4}(c_2\oplus c_1)} e^{i\frac{\pi}{4}c_1} e^{i\frac{\pi}{2}c_2} |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle$$

L'état final à la sortie du circuit est donc (en tenant compte aussi du préfacteur $e^{-i\frac{\pi}{4}c_2} \frac{1}{\sqrt{2}}$ au point (10)).

$$\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}(c_1+c_2-(c_2\oplus c_1))} |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \left\{ e^{-i\frac{\pi}{4}[c_2+c_1-(c_1\oplus c_2)]} (|0\rangle + |1\rangle) + (-1)^t e^{-i\frac{\pi}{4}[1\oplus c_2-(1\oplus c_1\oplus c_2)+1\oplus c_1-1]} (|0\rangle - |1\rangle) \right\}$$

En factorisant la première phase du 3ème qubit on trouve :

$$\frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{4}(c_1+c_2-(c_2\oplus c_1))} |c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes \left\{ (|0\rangle + |1\rangle) + (-1)^t e^{-i\frac{\pi}{4}\phi} (|0\rangle - |1\rangle) \right\}$$

avec l'expression pour ϕ :

$$\phi = (1 \oplus c_1) + (1 \oplus c_2) - 1 - (1 \oplus c_1 \oplus c_2) - c_1 - c_2 + (c_1 \oplus c_2)$$

On vérifie en prenant les 4 cas possibles $(c_1, c_2) = (0, 0); (0, 1); (1, 0); (1, 1)$ que

$$\phi = -4(c_1 \wedge c_2).$$

Donc l'état du dernier qubit est (car $e^{i\pi} = -1$) :

$$(|0\rangle + |1\rangle) + (-1)^{t+(c_1 \wedge c_2)}(|0\rangle - |1\rangle) = (1 + (-1)^{t+(c_1 \wedge c_2)})|0\rangle + (1 - (-1)^{t+(c_1 \wedge c_2)})|1\rangle.$$

On vérifie explicitement que cet état est

$$2 \cdot |t \oplus (c_1 \wedge c_2)\rangle.$$

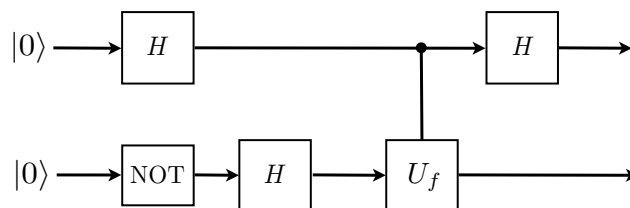
L'état final est donc :

$$|c_1\rangle \otimes |c_2\rangle \otimes |t \oplus (c_1 \wedge c_2)\rangle$$

qui est la sortie de la porte de Toffoli (ou CCNOT).

Exercice 5 *Algorithme de Deutsch et Josza le plus simple possible*

Pour $n = 1$ le circuit de l'algorithme de DJ est



1. Etat initial : $|0\rangle \otimes |0\rangle$
2. Après NOT : $|0\rangle \otimes |1\rangle$
3. Après les portes de $H_1 \otimes H_2$:

$$\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$$

4. Après $(U_f)_{12}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(|0\rangle \otimes |f(0)\rangle - |0\rangle \otimes |1 \oplus f(0)\rangle + |1\rangle \otimes |f(1)\rangle - |1\rangle \otimes |1 \oplus f(1)\rangle) \\ &= \frac{1}{2}|0\rangle \otimes (|f(0)\rangle - |1 \oplus f(0)\rangle) + \frac{1}{2}|1\rangle \otimes (|f(1)\rangle - |1 \oplus f(1)\rangle). \end{aligned}$$

Si $f(0) = 0$ on a

$$|f(0)\rangle - |1 \oplus f(0)\rangle = |0\rangle - |1\rangle$$

Si $f(0) = 1$ on a

$$|f(0)\rangle - |1 \oplus f(0)\rangle = |1\rangle - |0\rangle$$

Donc en général on peut écrire

$$|f(0)\rangle - |1 \oplus f(0)\rangle = (-1)^{f(0)}(|0\rangle - |1\rangle).$$

et aussi de façon similaire

$$|f(1)\rangle - |1 \oplus f(1)\rangle = (-1)^{f(1)}(|0\rangle - |1\rangle).$$

Donc l'état après $(U_f)_{12}$ est :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left((-1)^{f(0)}|0\rangle + (-1)^{f(1)}|1\rangle \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)$$

5. Après la dernière porte de Hadamard $(H)_1 \otimes I_2$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2}} \left((-1)^{f(0)} \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} + (-1)^{f(1)} \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(((-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)})|0\rangle + ((-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)})|1\rangle \right) \otimes \left(\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

Processus de mesure :

Quand on mesure le premier qubit on peut ignorer le qubit $\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ car le produit tensoriel est complètement factorisé. Donc la probabilité d'obtenir $|0\rangle$ est (règle de Born)

$$\frac{1}{4} |(-1)^{f(0)} + (-1)^{f(1)}|^2 = \text{prob}(0)$$

et la probabilité d'obtenir $|1\rangle$ est

$$\frac{1}{4} |(-1)^{f(0)} - (-1)^{f(1)}|^2 = \text{prob}(1).$$

Si f est constante alors $\text{Prob}(0) = 1$ et $\text{Prob}(1) = 0$. Par contre si f est balancée $\text{Prob}(0) = 0$ et $\text{Prob}(1) = 1$.

Ainsi avec une seule expérience (une question à l'Oracle) on peut distinguer si f est constante ou balancée.