Série 7
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Etats de Bell.*

Le but de cet exercice est de se familiariser avec certains calculs relatifs aux états de Bell : les calculs des trois premières questions sont à faire en notation de Dirac.

1. Montrez que 4 les états de Bell introduits en cours forment une base orthonormée de $\mathbf{C}^2 \otimes \mathbf{C}^2$.
2. Montrez que l'état $|B_{00}\rangle$ (ou bien prenez en un autre) est intriqué. C'est à dire qu'il n'existe pas $|\psi_1\rangle \in \mathbf{C}^2$ et $|\psi_2\rangle \in \mathbf{C}^2$ tels que $|B_{00}\rangle = |\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \in \mathbf{C}^2$.
3. Soit $|\gamma\rangle = (\cos\gamma|0\rangle + \sin\gamma|1\rangle)$. Montrez l'identité (pour tout $|\gamma\rangle$)
$$|B_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\gamma\rangle \otimes |\gamma\rangle + |\gamma_\perp\rangle \otimes |\gamma_\perp\rangle)$$
4. Représentez les 4 états de Bell en coordonnées. Utilisez la représentation canonique $|0\rangle = (1,0)^T$ et $|1\rangle = (0,1)^T$.

Exercice 2 *Opération unitaire créant l'intrication.*

Soit $|x\rangle \otimes |y\rangle$ avec $x, y = 0, 1$ les 4 états de la "base computationnelle" (ou cacnonique) pour deux 2 qubits. On définit l'opération unitaire $CNOT$ (appelée "control-not")

$$CNOT|x\rangle \otimes |y\rangle = |x\rangle \otimes |y \oplus x\rangle$$

où $y \oplus x$ est l'addition modulo 2. Cette opération modélise certaines interactions entre degrés de liberté de spin, et est responsable de l'intrication.

1. Vérifiez que
$$|B_{xy}\rangle = (CNOT)(H \otimes I)|x\rangle \otimes |y\rangle$$
Faites le calcul en notation de Dirac. Est ce que la partie $(H \otimes I)|x\rangle \otimes |y\rangle$ est déja intriquée ? Justifiez.
2. Donnez le tableau des composantes des matrices $CNOT$ et $H \otimes I$ ainsi que leur produit dans la base computationnelle. Vérifiez que les matrices sont unitaires.
3. A partir de l'unitarité des matrices, donnez une preuve compacte en cinq lignes maximum de l'orthonormalité des états $|B_{xy}\rangle$.

Exercice 3 *Opérations de mesure sur les états de Bell.*

Une paire EPR est produite par une source et chaque partie de la paire est transmise à Alice et Bob. Reprendre et détaillez les calculs intermédiaires de la discussion du cours et des notes sur les différends scénarios de mesure d'Alice et Bob sur les deux parties d'un état de Bell. On suppose qu'Alice et Bob font des mesures locales et ne communiquent pas.

1. Alice mesure avant Bob. Alice mesure dans la base $\{|\alpha\rangle, |\alpha_\perp\rangle\}$ et Bob dans la base $\{|\beta\rangle, |\beta_\perp\rangle\}$. Donnez les états possibles observés du coté d'Alice. Même question du coté de Bob.
2. Bob mesure avant Alice. Même question.
3. Alice et Bob mesurent simultanément dans la base $\{|\alpha\rangle\otimes|\beta\rangle, |\alpha_\perp\rangle\otimes|\beta\rangle, |\alpha\rangle\otimes|\beta_\perp\rangle, |\alpha_\perp\rangle\otimes|\beta_\perp\rangle\}$. Donnez les résultats possibles des mesures et les probabilités correspondantes. Donnez les états (à un qubit) observés de chaque coté et les probabilités correspondantes.

Exercice 4 *Un calcul utile pour la dérivation des inégalités de Bell.*

Soit les observables (polarisation)

$$A = (+1)|\alpha\rangle\langle\alpha| + (-1)|\alpha_\perp\rangle\langle\alpha_\perp|$$

et

$$B = (+1)|\beta\rangle\langle\beta| + (-1)|\beta_\perp\rangle\langle\beta_\perp|.$$

Calculez $\langle\psi|A \otimes B|\psi\rangle$ pour les états

1. $|\psi\rangle = |B_{00}\rangle$. Suivre le calcul fait en cours.
2. $|\psi\rangle = |\gamma\rangle \otimes |\delta\rangle$. Faire le calcul en détail. On pourra utiliser $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta$ pour mettre le résultat sous forme agréable et utile pour la question suivante.
3. Dans le cas de l'état produit vérifiez que la corrélation X introduite au cours est inférieure ou égale à 2. Inspirez vous d'un des arguments utlisés en cours.