Solution de la série 5
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Niveaux d'énergie d'un moment magnétique (spin 1/2) dans un champ magnétique.*

1. Les matrices de Pauli sont

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

   L'Hamiltonian (l'observervable énergie) devient donc

$$\begin{aligned} H &= -\gamma(\sigma_x B_x + \sigma_y B_y + \sigma_z B_z) \\ &= -\gamma \begin{pmatrix} B_z & B_x - iB_y \\ B_x + iB_y & -B_z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. Les niveaux d'énergie ne peuvent pas dépendre du choix de nos axes de coordonnées. Ainsi on peut placer la direction z dans la même direction que $\vec{B}$. Dans ce système de coordonnées on a $B_x = B_y = 0$ et $B_z = B$. Donc

$$\tilde{H} = -\gamma B \sigma_z = \begin{pmatrix} -\gamma B & 0 \\ 0 & \gamma B \end{pmatrix}.$$

   Les valeurs propres sont simplement $E_\pm = \pm\gamma B$.
   Les vecteurs propres

$$|\psi_-\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |\uparrow\rangle\,, \ |\psi_+\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |\downarrow\rangle\,,$$

   Sur la spehre de Bloch l'un d'eux est le long de $\vec{B}$ et l'autre opposé à $\vec{B}$.

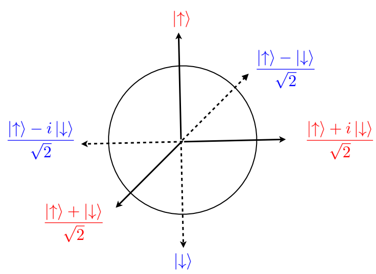

Figure 1 – Bloch Sphere.

3. L'expression des valeurs propres ne dépend du choix des axes. Mais celle des vecteurs propres en dépend. Néanmoins il est toujours vrai que les vecteurs propres sont le long et opposé à $\vec{B}$. Donc ceux-ci sont

$$|\psi_1\rangle = \cos(\frac{\theta}{2}) |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin(\frac{\theta}{2}) |\downarrow\rangle$$

et

$$|\psi_2\rangle = \sin(\frac{\theta}{2}) |\uparrow\rangle\rangle - e^{i\phi} \cos(\frac{\theta}{2}) |\downarrow\rangle$$

avec (θ, ϕ) qui déterminent la direction du champ magnétique :

$$\vec{B} = (B_x, B_y, B_z) = B(\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$$

On peut calculer explicitement $\cos\frac{\theta}{2}$, $\sin\frac{\theta}{2}$ et $ei\phi$ par trigonométrie.

4. L'état excité correspond au spin dans la direction opposée à la à celle du champ magnétique. Pour la transition $|\downarrow\rangle \to |\uparrow\rangle$, $\Delta E = E_{\text{photon}} = E_+ - E_- = 2\gamma B$, donc $\nu_{\text{photon}} = \frac{2\gamma B}{h}(\text{Hz})$ où h est la constante de Planck.

Exercice 2 *Appareil de Stern-Gerlach*

1. Pour un moment magétique dans l'état $|\theta, \phi\rangle = \cos(\theta/2) |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |\downarrow\rangle$, la probabilité d'observer à la sortie de l'appareilde Stern-Gerlach l'état$|\uparrow\rangle$ est donnée par

$$|\langle\uparrow | \theta, \phi\rangle|^2 = \left| \left\langle \uparrow \,\middle|\, \cos(\theta/2) |\uparrow\rangle + e^{i\phi} \sin(\theta/2) |\downarrow\rangle \right\rangle \right|^2 = \cos^2(\theta/2).$$

De facon similaire la probabilité d'observer à la sortie l'état $|\downarrow\rangle$ est donnée par $\sin^2(\theta/2)$.

2. Si $p(\theta, \phi) = \frac{1}{4\pi}$, le nombre total de particules observées avec $|\uparrow\rangle$ est

$$N_\uparrow = \frac{N}{4\pi} \int_{-1}^{1} d(\cos(\theta)) \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2(\theta/2) = \frac{N}{2} \int_{-1}^{1} d(\cos(\theta)) \cos^2(\theta/2).$$

Utilisant l'identité $\cos(\theta) = 2\cos^2(\theta/2) - 1$, on obtient

$$N_\uparrow = \frac{N}{2} \int_{-1}^{1} d(\cos(\theta)) \frac{1 + \cos(\theta)}{2} = \frac{N}{8}(1+x)^2|_{-1}^{1} = \frac{N}{2}.$$

Un calcul similaire avec $\sin^2(\theta/2)$ à la place de $\cos^2(\theta/2)$ donne $N_\downarrow = \frac{N}{2}$. Donc $N_\uparrow + N_\downarrow = N$ (comme prévu).

3. Soit $p(\theta, \phi) = \frac{1}{2\pi}$ si $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ et 0 sinon. Nous avons

$$N_\uparrow = \frac{N}{2\pi} \int_0^1 d(\cos(\theta)) \int_0^{2\pi} d\phi \cos^2(\theta/2) = \frac{N}{2} \int_0^1 d(\cos(\theta)) \cos^2(\theta/2) = \frac{3N}{4}.$$

De plus procédant de facon similaire on trouve $N_\downarrow = \frac{N}{4}$. Nous voyons que si initialement tous les moments magnétiques sont polarisés dans la demi-sphere supérieure, alors il y a une proportion d'entre eux qui sont observésdans la partie inférieure de lécran.

Exercice 3 *"Dynamique" probabiliste versus quantique*

1. Pour montrer que $|\langle j| U |i\rangle|^2 = R_{ji}$ est une matrice stochastique, il faut verifier que $\sum_{j=0}^{n-1} P_{ji} = 1$ et $0 \leq P_{ji} \leq 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1} P_{ji} &= \sum_{j=0}^{n-1} |\langle j| U |i\rangle|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \langle i| U^\dagger |j\rangle \langle j| U |i\rangle \\ &= \langle i| U^\dagger \sum_{j=0}^{n-1} |j\rangle \langle j| U |i\rangle = \langle i| U^\dagger U |i\rangle \\ &= \langle i| i\rangle = 1\end{aligned}$$

   Notez que tous les termes $|\langle j| U |i\rangle|^2$ sont positifs, c'est pourquoi $0 \leq P_{ji} \leq 1$.

2. La probabilité d'observer l'état 2 à la sortie est

$$\mathrm{Prob}(2) = P_{00}Q_{20} + P_{10}Q_{21} + P_{20}Q_{22}.$$

3. – La probabilité d'observer l'état $|2\rangle$ à la sortie est

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(|2\rangle) &= |\langle 2| U_2U_1 |0\rangle|^2 = \langle 2| U_2U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger U_2^\dagger |2\rangle \\ &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |j\rangle \langle j| U_2^\dagger |2\rangle \\ &= \sum_{i=j} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |i\rangle \langle i| U_2^\dagger |2\rangle \\ &+ \sum_{i\neq j} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |j\rangle \langle j| U_2^\dagger |2\rangle\end{aligned}$$

   Notez que la première somme est la probabilité d'observer l'état 2 à la sortie dans le cas classique :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{2} \langle 2| U_2 |i\rangle \langle i| U_1 |0\rangle \langle 0| U_1^\dagger |i\rangle \langle i| U_2^\dagger |2\rangle &= \sum_{i=0}^{2} |\langle 2| U_2 |i\rangle|^2 |\langle i| U_1 |0\rangle|^2 \\ &= P_{00}Q_{20} + P_{10}Q_{21} + P_{20}Q_{22}\end{aligned}$$

   La deuxième somme est un terme d'interférence quantique.

   – En faisant la mesure intermédiaire après la première étape on observe
   - $|0\rangle$ avec la probabilité $|\langle 0| U_1 |0\rangle|^2$,
   - $|1\rangle$ avec la probabilité $|\langle 1| U_1 |0\rangle|^2$,
   - $|2\rangle$ avec la probabilité $|\langle 2| U_1 |0\rangle|^2$.

   La probabilité d'observer l'état final $|2\rangle$ à la sortie est

$$|\langle 0| U_1 |0\rangle|^2 |\langle 2| U_2 |0\rangle|^2 + |\langle 1| U_1 |0\rangle|^2 |\langle 2| U_2 |1\rangle|^2 + |\langle 2| U_1 |0\rangle|^2 |\langle 2| U_2 |2\rangle|^2$$

   qui correspond au cas classique.