Solution de la série 3
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Mesures de la Polarisation*

1. L'état du système est
$$|\Psi\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle$$
et l'état après la mesure est
$$|\alpha\rangle = \cos\alpha\,|x\rangle + \sin\alpha\,|y\rangle\,, \qquad |\alpha_\perp\rangle = \cos\alpha_\perp\,|x\rangle + \sin\alpha_\perp\,|y\rangle$$
Notez que $\alpha_\perp = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et $\cos\alpha_\perp = \sin\alpha$, $\sin\alpha_\perp = \cos\alpha$. La probabilité de détecter $|\alpha\rangle$ est
$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) &= |\langle\alpha\,|\Psi\rangle\,|^2\\ &= |\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha|^2\\ &= (\cos(\theta-\alpha))^2\end{aligned}$$
La probabilité de détecter $|\alpha_\perp\rangle$ est
$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = -1) &= |\langle\alpha_\perp\,|\Psi\rangle\,|^2\\ &= |\cos\theta\cos\alpha_\perp + \sin\theta\sin\alpha_\perp|^2\\ &= (\cos(\theta-\alpha_\perp))^2\\ &= (\sin(\theta-\alpha))^2\end{aligned}$$
Notez que la somme des deux probabilités vaut bien 1.
2. Pour l'analyseur avec un angle α, l'espérance est
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,[p_\alpha] &= +1\cdot\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) + (-1)\,\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = -1)\\ &= 2\,\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) - 1\\ &= 2(\cos(\theta-\alpha))^2 - 1\\ &= \cos(2(\theta-\alpha))\end{aligned}$$
et la variance est
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,[p_\alpha] &= \mathbb{E}\left[p_\alpha^2\right] - (\mathbb{E}\,[p_\alpha])^2\\ &= 1 - (\mathbb{E}\,[p_\alpha])^2\\ &= 4\,\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1)\,(1 - \mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1))\\ &= (\sin 2(\theta-\alpha))^2\end{aligned}$$

3. Vérifions maintenant que l'on obtient les mêmes formules pour les moyennes et variance de l'observable P_α.

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\,P_\alpha\,|\Psi\rangle &= \langle\Psi\,|\alpha\rangle\,\langle\alpha\,|\Psi\rangle - \langle\Psi\,|\alpha_\perp\rangle\,\langle\alpha_\perp\,|\Psi\rangle \\ &= |\langle\alpha\,|\Psi\rangle|^2 - |\langle\alpha_\perp\,|\Psi\rangle|^2 \\ &= \cos^2(\theta-\alpha) - \sin^2(\theta-\alpha) \\ &= \cos(2(\theta-\alpha)) \\ &= \mathbb{E}[p_\alpha]\end{aligned}$$

Notez aussi que $P_\alpha^2 = (|x\rangle\langle x| - |y\rangle\langle y|)(|x\rangle\langle x| - |y\rangle\langle y|)$. En développant et en utilisant que $\langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1$, $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = 0$ on obtient

$$P_\alpha^2 = |x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y|$$

et donc

$$\langle\Psi|\,P_\alpha^2\,|\Psi\rangle = \cos^2(\theta-\alpha) + \sin^2(\theta-\alpha) = 1$$

Finalement

$$\begin{aligned}\langle\Psi|\,P_\alpha^2\,|\Psi\rangle - \langle\Psi|\,P_\alpha\,|\Psi\rangle^2 &= 1 - (\mathbb{E}\,[p_\alpha])^2 \\ &= \mathrm{Var}\,[p_\alpha]\end{aligned}$$

Exercice 2 *Interféromètre de Mach-Zehnder*

1. L'état initial est : $|h\rangle$
   Après le 1^er^ miroir semi-transparent : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + i\,|v\rangle)$.
   Après les deux déphaseurs : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|h\rangle + ie^{i\varphi_2}\,|v\rangle)$.
   Après les miroirs réflichissants : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|v\rangle - ie^{i\varphi_2}\,|h\rangle)$.
   Après $2^{\text{ém}}$ miroir semi-transparent :

$$\begin{aligned}&\frac{ie^{i\varphi_1}}{2}(i\,|h\rangle + |v\rangle) - \frac{e^{i\varphi_i}}{2}(|h\rangle + i\,|v\rangle) \\ &= \frac{1}{2}[-(e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2})\,|h\rangle + i(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})\,|v\rangle] \\ &= -\frac{e^{i\varphi_1}}{2}[(1 + e^{i\Delta\varphi})\,|h\rangle - i(1 - e^{i\Delta\varphi})\,|v\rangle] \\ &= |\psi_{\text{fin}}\rangle\,,\end{aligned}$$

   avec $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

2. La probabilité de détection en D_1 est

$$\begin{aligned}\text{prob}(D_1) &= |\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2 \\ &= \frac{1}{4}|1 + e^{i\Delta\varphi}|^2 \\ &= \frac{1}{4}|e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}}|^2 \\ &= \cos^2(\frac{\Delta\varphi}{2}).\end{aligned}$$

Probabilité de détection en D_2 est $|\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2 = \sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})$. Ces probabilités dépendent seulement de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, donc seules les <u>différences de phases sont mesurables</u> et non pas les "phases absolues ou globales".