Solution de la série 3
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Mesures de la Polarisation*

1. L'état du système est

$$|\Psi\rangle = \cos\theta\,|x\rangle + \sin\theta\,|y\rangle$$

et l'état après la mesure est

$$|\alpha\rangle = \cos\alpha\,|x\rangle + \sin\alpha\,|y\rangle\,, \qquad |\alpha_\perp\rangle = \cos\alpha_\perp\,|x\rangle + \sin\alpha_\perp\,|y\rangle$$

Notez que $\alpha_\perp = \frac{\pi}{2} - \alpha$ et $\cos\alpha_\perp = \sin\alpha$, $\sin\alpha_\perp = \cos\alpha$. La probabilité de détecter $|\alpha\rangle$ est

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) &= |\langle\alpha\,|\Psi\rangle\,|^2\\ &= |\cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha|^2\\ &= (\cos(\theta-\alpha))^2\end{aligned}$$

La probabilité de détecter $|\alpha_\perp\rangle$ est

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = -1) &= |\langle\alpha_\perp\,|\Psi\rangle\,|^2\\ &= |\cos\theta\cos\alpha_\perp + \sin\theta\sin\alpha_\perp|^2\\ &= (\cos(\theta-\alpha_\perp))^2\\ &= (\sin(\theta-\alpha))^2\end{aligned}$$

Notez que la somme des deux probabilités vaut bien 1.

2. Pour l'analyseur avec un angle α, l'espérance est

$$\begin{aligned}\mathrm{Exp}\,[p_\alpha] &= +1\cdot\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) + (-1)\,\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = -1)\\ &= 2\,\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1) - 1\\ &= 2(\cos(\theta-\alpha))^2 - 1\\ &= \cos(2(\theta-\alpha)) = \mathrm{Exp}[p_\alpha]\end{aligned}$$

et la variance est

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\,[p_\alpha] &= \mathrm{Exp}\left[p_\alpha^2\right] - (\mathrm{Exp}\,[p_\alpha])^2\\ &= 1 - (\mathrm{Exp}\,[p_\alpha])^2\\ &= 4\,\mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1)\,(1 - \mathrm{Prob}\,(p_\alpha = +1))\\ &= (\sin 2(\theta-\alpha))^2\end{aligned}$$

3. Vérifions maintenant que l'on obtient les mêmes formules pour les moyennes et variance de l'observable P_α.

$$\begin{aligned}\langle\Psi| P_\alpha |\Psi\rangle &= \langle\Psi |\alpha\rangle \langle\alpha |\Psi\rangle - \langle\Psi |\alpha_\perp\rangle \langle\alpha_\perp |\Psi\rangle \\ &= |\langle\alpha |\Psi\rangle|^2 - |\langle\alpha_\perp |\Psi\rangle|^2 \\ &= \cos^2(\theta-\alpha) - \sin^2(\theta-\alpha) \\ &= \cos(2(\theta-\alpha))\end{aligned}$$

Notez aussi que $P_\alpha^2 = (|x\rangle\langle x| - |y\rangle\langle y|)(|x\rangle\langle x| - |y\rangle\langle y|)$. En développant et en utilisant que $\langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1$, $\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = 0$ on obtient

$$P_\alpha^2 = |x\rangle\langle x| + |y\rangle\langle y|$$

et donc

$$\langle\Psi| P_\alpha^2 |\Psi\rangle = \cos^2(\theta-\alpha) + \sin^2(\theta-\alpha) = 1$$

Finalement

$$\begin{aligned}\langle\Psi| P_\alpha^2 |\Psi\rangle - \langle\Psi| P_\alpha |\Psi\rangle^2 &= 1 - (\mathrm{Exp}\,[p_\alpha])^2 \\ &= \mathrm{Var}\,[p_\alpha]\end{aligned}$$

Dans le cas (i) on mesure d'abord P_α et la probabilité d'obtenir $p_\alpha = +1$ (par exemple) est $\cos^2(\theta-\alpha)$. Juste après cette mesure létat est $|\alpha\rangle$. Ensuite on mesure P_β : la probablité d'obtenir $p_\beta = +1$ (par exemple) est $|\langle\beta|\alpha\rangle|^2 = cos^2(\beta-\alpha)$. Ainsi

$$\mathrm{Prob}(p_\alpha = +1 \text{ avant}, p_\beta = +1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\alpha)\cos^2(\beta-\alpha)$$

De même,

$$\mathrm{Prob}(p_\alpha = +1 \text{ avant}, p_\beta = -1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\alpha)\sin^2(\beta-\alpha)$$

et

$$\mathrm{Prob}(p_\alpha = -1 \text{ avant}, p_\beta = +1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\alpha_\perp)\cos^2(\beta-\alpha_\perp) = \sin^2(\theta-\alpha)\sin^2(\beta-\alpha)$$

$$\mathrm{Prob}(p_\alpha = -1 \text{ avant}, p_\beta = -1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\alpha_\perp)\sin^2(\beta-\alpha_\perp) = \sin^2(\theta-\alpha)\cos^2(\beta-\alpha)$$

On vérifie que ces quatres probabilités se somment à 1.

4. Dans le cas (ii) on mesure d'abord P_β et la probabilité d'obtenir $p_\beta = +1$ (par exemple) est $\cos^2(\theta-\beta)$. Juste après cette mesure létat est $|\beta\rangle$. Ensuite on mesure P_α : la probablité d'obtenir $p_\alpha = +1$ (par exemple) est $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = cos^2(\alpha-\beta)$. Ainsi

$$\mathrm{Prob}(p_\beta = +1 \text{ avant}, p_\alpha = +1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\beta)\cos^2(\beta-\alpha)$$

De même,

$$\mathrm{Prob}(p_\beta = +1 \text{ avant}, p_\alpha = -1 \text{ apres}) = \cos^2(\theta-\beta)\sin^2(\beta-\alpha)$$

et

Prob($p_\beta = -1$ avant, $p_\alpha = +1$ apres) $= \cos^2(\theta - \beta_\perp)\cos^2(\beta - \alpha_\perp) = \sin^2(\theta - \beta)\sin^2(\beta - \alpha)$

Prob($p_\beta = -1$ avant, $p_\alpha = -1$ apres) $= \cos^2(\theta - \beta_\perp)\sin^2(\beta - \alpha_\perp) = \sin^2(\theta - \beta)\cos^2(\beta - \alpha)$

On vérifie que ces quatres probabilités se somment à 1.

On voit dans cet exercice que la mesure simultanée de P_α et P_β n'a pas vraiment de sens. Pour chacunne de ces mesures il faut un appareil de mesure différend et l'ordre des mesures compte. Nous verrons qu'en mécanique quantique ceci est le cas lorsque les observables ne commuttent pas, c'est à dire $P_\alpha P_\beta - P_\beta P_\alpha \neq 0$.

Exercice 2 *Interféromètre de Mach-Zehnder*

1. L'état initial est : $|h\rangle$
   Après le 1^er miroir semi-transparent : $\frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + i\,|v\rangle)$.
   Après les deux déphaseurs : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|h\rangle + ie^{i\varphi_2}\,|v\rangle)$.
   Après les miroirs réflichissants : $\frac{1}{\sqrt{2}}(e^{i\varphi_1}\,|v\rangle - ie^{i\varphi_2}\,|h\rangle)$.
   Après 2^ém miroir semi-transparent :

$$\begin{aligned}
&\frac{ie^{i\varphi_1}}{2}(i\,|h\rangle + |v\rangle) - \frac{e^{i\varphi_i}}{2}(|h\rangle + i\,|v\rangle) \\
&= \frac{1}{2}[-(e^{i\varphi_1} + e^{i\varphi_2})\,|h\rangle + i(e^{i\varphi_1} - e^{i\varphi_2})\,|v\rangle] \\
&= -\frac{e^{i\varphi_1}}{2}[(1 + e^{i\Delta\varphi})\,|h\rangle - i(1 - e^{i\Delta\varphi})\,|v\rangle] \\
&= |\psi_{\text{fin}}\rangle\,,
\end{aligned}$$

   avec $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.
2. La probabilité de détection en D_1 est

$$\begin{aligned}
\text{prob}(D_1) &= |\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2 \\
&= \frac{1}{4}|1 + e^{i\Delta\varphi}|^2 \\
&= \frac{1}{4}|e^{i\frac{\Delta\varphi}{2}} + e^{-i\frac{\Delta\varphi}{2}}|^2 \\
&= \cos^2(\frac{\Delta\varphi}{2}).
\end{aligned}$$

   Probabilité de détection en D_2 est $|\langle h\,|\psi_{\text{fin}}\rangle\,|^2 = \sin^2(\frac{\Delta\varphi}{2})$. Ces probabilités dépendent seulement de $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$, donc seules les <u>différences de phases sont mesurables</u> et non pas les "phases absolues ou globales“.