Solution de la série 2
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Effet de l'environnement dans l'expérience de Young*

1. Photon observé dans l'état $|1\rangle$

L'état final du système C60 plus photon est en notation de Dirac $|\vec{r}\rangle \otimes |1\rangle$ où $\vec{r}$ est la position observée sur l'écran. D'après le postulat de la mesure, la probabilité de cette observation est donc :

$$\begin{aligned} |(\langle\vec{r}| \otimes \langle 1|)(|\psi_1\rangle \otimes |1\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |2\rangle)|^2 &= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle\langle 1|1\rangle + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle\langle 1|2\rangle|^2 \\ &= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle|^2 \end{aligned}$$

puisque $\langle 1|2\rangle = 0$ et $\langle 1|1\rangle = 1$. De plus $\langle\vec{r}|\psi_1\rangle = \psi_1(\vec{r}) = \frac{A}{|\vec{r}-\vec{r_1}|}e^{i(k|\vec{r}-\vec{r_1}|-\omega t)}$ et on trouve donc :

$$|\langle\vec{r}|\psi_1\rangle|^2 = \frac{A^2}{|\vec{r}-\vec{r_1}|^2} \approx \frac{A^2}{D^2}.$$

Ainsi on n'observe pas de franges d'interférences. Notez que si l'on ne fait pas la dernière approximation on obtient une probabilité en forme de cloche centrée en face de la fente $\vec{r_1}$.

2. Photon observé dans l'état $|2\rangle$

Avec $|2\rangle$ à la place de $|1\rangle$ on obtient un résultat identique. On observera donc une probabilité en forme de cloche centrée en face de la fente $\vec{r_2}$.

3. Plusieurs expériences

Le photon est à chaque fois observé dans l'état $|1\rangle$ ou dans l'état $|2\rangle$. Les deux événements sont exclusifs . Donc l'intensité observée $\vec{r}$ est

$$|\langle\vec{r}|\psi_1\rangle|^2 + |\langle\vec{r}|\psi_2\rangle|^2$$

donnée par la somme des probabilités des deux événements. Ainsi on n'observe pas de franges d'interférences. Cette somme est $\approx \frac{2A^2}{D^2}$ (pour $D >> d$).

4. Photon observé dans l'état $|0\rangle$

On a :

$$
\begin{aligned}
|(\langle\vec{r}|\otimes\langle 0|)(|\psi_1\rangle\otimes|0\rangle+|\psi_2\rangle\otimes|0\rangle)|^2 &= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle\langle 0|0\rangle+\langle\vec{r}|\psi_2\rangle\langle 0|0\rangle|^2\\
&= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle+\langle\vec{r}|\psi_2\rangle|^2\\
&= (\langle\vec{r}|\psi_1\rangle+\langle\vec{r}|\psi_2\rangle)\overline{(\langle\vec{r}|\psi_1\rangle+\langle\vec{r}|\psi_2\rangle)}\\
&= (\langle\vec{r}|\psi_1\rangle+\langle\vec{r}|\psi_2\rangle)(\overline{\langle\vec{r}|\psi_1\rangle}+\overline{\langle\vec{r}|\psi_2\rangle})\\
&= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle|^2+\langle\vec{r}|\psi_1\rangle\overline{\langle\vec{r}|\psi_2\rangle}+\langle\vec{r}|\psi_2\rangle\overline{\langle\vec{r}|\psi_1\rangle}+|\langle\vec{r}|\psi_2\rangle|^2\\
&= \frac{2A^2}{D^2}+\frac{A^2}{D^2}e^{-ik(|\vec{r}-\vec{r_2}|-|\vec{r}-\vec{r_1}|)}+\frac{A^2}{D^2}e^{ik(|\vec{r}-\vec{r_2}|-|\vec{r}-\vec{r_1}|)}\\
&= \frac{A^2}{D^2}(2+2\cos(k(|\vec{r}-\vec{r_2}|-|\vec{r}-\vec{r_1}|)))\\
&= \frac{A^2}{D^2}(2+2\cos(kd\sin\theta))
\end{aligned}
$$

On observe donc à nouveau des franges d'interférences !

Remarque : en utilisant $\cos\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ vous pouvez vérifier que la derniere expression est égale à

$$\frac{4A^2}{D^2}\cos^2(\frac{kd}{2}\sin\theta)$$

qui est encore égale à (en utilisant $k=2\pi/\lambda$,

$$\frac{4A^2}{D^2}\cos^2(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta)$$

comme dans la série 1.