Série 2
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Effet de l'environnement dans l'expérience de Young*

Le but de cet exercice est de discuter une expérience de pensée qui est une variation de l'expérience de Young. Ce genre d'expérience de pensée devient aujpurd'hui une réalité de laboratoire, grâce aux expériences d'interférométrie (par exemple doubles fentes) réalisées avec de grosses molécules.

On imagine une source de particules uniques (C60, électrons, neutrons, photons...) qui passent à travers les deux fentes de Young. L'état de la particule entre les fentes et l'écran est donné par une fonction d'onde $\psi(\vec{r}) = \psi_1(\vec{r}) + \psi_2(\vec{r})$ ou $\psi_{1,2}$ sont les fonctions d'onde spheriques de la série 1. En fait leur expression exacte nous importe peu ici. Nous allons décrire l'état de la particule de facon plus abstraite par des kets (en notation de Dirac)

$$|\psi\rangle = |\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle$$

L'amplitude de la particule au point $\vec{r}$ est donnée par $\langle\vec{r}|\psi\rangle = \langle\vec{r}|\psi_1\rangle + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle$. La probabilité de d'observer la particule au point $\vec{r}$ (ce point peut être sur l'écran par exemple) est

$$\begin{aligned}|\langle\vec{r}|\psi\rangle|^2 &= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle|^2 \\ &= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle|^2 + |\langle\vec{r}|\psi_2\rangle|^2 + \overline{\langle\vec{r}|\psi_1\rangle}\langle\vec{r}|\psi_2\rangle + \langle\vec{r}|\psi_1\rangle\overline{\langle\vec{r}|\psi_2\rangle}\end{aligned}$$

Le calcul de cette probabilité a été effectué dans la série 1 et donne les franges d'interférences. Ici nous considérons la variation suivante de l'expérience. On veut modéliser une situation ou la particule n'est pas isolée de l'environnement. On peut imaginer par exemple que la molécule de C60 possède des degrés de libertés internes qui sont excités : elle peut ainsi émettre spontanément un photon. Il est naturel de supposer que l'état du photon (par exemple la direction de la quantité de mouvement) dépend de l'état de la molécule : on admet que si la molécule est dans l'état $|\psi_1\rangle$ le photon est émis dans un état $|1\rangle$, et si la molécule est dans l'état $|\psi_2\rangle$ le photon est émis dans un état $|2\rangle$. Nous supposons aussi que les états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ du photon sont orthogonaux i.e $\langle 1|2\rangle = 0$. Ainsi l'état du système C60 plus photon est

$$|\psi_1\rangle \otimes |1\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |2\rangle$$

Nous reviendrons plus tard ces états dits intriqués pour lesquels on ne peut dissocier l'état du photon de celui de la molécule.

On considère maintenant les mesures suivantes.

1. On observe le point de collision de la molécule sur l'écran et le photon dans un photodétecteur. Quelle est la probabilité d'observer la molécule dan l'état $|\vec{r}\rangle$ (position $\vec{r}$) et le photon dan l'état $|1\rangle$ (direction 1 pour sa quantité de mouvement).

2. Même question si le photon est observé dans l'état $|2\rangle$.

3. On fait plusieurs expériences : c'est à dire que plusieurs molécules sont envoyées une par une à travers la double fente. Décrire l'intensité observée sur lécran. Comparer au cas ou la molécule est isolée de son environnement et le photon est absent.

On considère maintenant une situation ou le photon émis n'est pas intriqué avec létat de la particule. En d'autre termes l'état du photon est indépendant de $|\psi_{1,2}\rangle$. Soit $|0\rangle$ cet état. L'état du système C60 plus photon est alors

$$|\psi_1\rangle \otimes |0\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |0\rangle$$

4. Quelle est la probabilité d'observer la particule dans l'état $|\vec{r}\rangle$ et le photon dans létat $|0\rangle$? Observe-t-on des franges d'interférences ?

Exercice 2 *Condition de quantification de Bohr*

Nous avons vu que De Broglie (1924) postula que l'onde, associée à électron sur une “orbite” circulaire de rayon R avec le noyau comme centre, est stationnaire. La condition de stationarité de l'onde impose $n\lambda = 2\pi R$, où λ est la longeur d'onde de De Broglie de l'electron. A partir de cette hypothèse il retrouva la formule

$$E_n = -\frac{Ry}{n^2}, \qquad n \geq 1$$

où la constante de Rydberg vaut $Ry \approx 13,6$ eV.

En fait cete formule avait était connue de Bohr en 1910. Bohr proposa le modèle suivant pour l'atome (disons d'Hydrogène) :

(i) Les orbites sont circulaires et satisfont aux lois de la mécanique classique.
(ii) Les électrons se situent sur certaines orbites permises.
(iii) Les orbites permises doivent satisfaire à la condition de quantification

$$\oint pdq = nh$$

Ici l'intégrale est prise le long de l'orbite électronique (p l'impulsion et q la position)

Dérivez la formule des niveaux d'énergie à partir de ces trois conditions. Indications : les calculs sont similaires à ceux fait au cours.

Remarque : La condition (iii) s'appelle condition de quantification semi-classique. Ce type de conditions joua un grand role avant l'avènement de l'équation de Schroedinger. Les conditions de quantifications semi-classiques sont fondamentales dans les traitements dits “semi-classiques” des problèmes quantiques.