Solution de la série 2
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Effet de l'environnement dans l'expérience de Young*

1. Photon observé dans l'état $|1\rangle$

L'état final du système C60 plus photon est en notation de Dirac $|\vec{r}\rangle \otimes |1\rangle$ où $\vec{r}$ est la position observée sur l'écran. D'après le postulat de la mesure, la probabilité de cette observation est donc :

$$\begin{aligned}|(\langle\vec{r}| \otimes \langle 1|)(|\psi_1\rangle \otimes |1\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |2\rangle)|^2 &= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle\langle 1|1\rangle + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle\langle 1|2\rangle|^2 \\ &= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle|^2\end{aligned}$$

puisque $\langle 1|2\rangle = 0$ et $\langle 1|1\rangle = 1$. De plus $\langle\vec{r}|\psi_1\rangle = \psi_1(\vec{r}) = \dfrac{A}{|\vec{r}-\vec{r_1}|} e^{i(k|\vec{r}-\vec{r_1}|-\omega t)}$ et on trouve donc :

$$|\langle\vec{r}|\psi_1\rangle|^2 = \frac{A^2}{|\vec{r}-\vec{r_1}|^2} \approx \frac{A^2}{D^2}.$$

Ainsi on n'observe pas de franges d'interférences. Notez que si l'on ne fait pas la dernière approximation on obtient une probabilité en forme de cloche centrée en face de la fente $\vec{r_1}$.

2. Photon observé dans l'état $|2\rangle$

Avec $|2\rangle$ à la place de $|1\rangle$ on obtient un résultat identique. On observera donc une probabilité en forme de cloche centrée en face de la fente $\vec{r_2}$.

3. Plusieurs expériences

Le photon est à chaque fois observé dans l'état $|1\rangle$ ou dans l'état $|2\rangle$. Les deux événements sont exclusifs . Donc l'intensité observée $\vec{r}$ est

$$|\langle\vec{r}|\psi_1\rangle|^2 + |\langle\vec{r}|\psi_2\rangle|^2$$

donnée par la somme des probabilités des deux événements. Ainsi on n'observe pas de franges d'interférences. Cette somme est $\approx \dfrac{2A^2}{D^2}$ (pour $D >> d$).

4. Photon observé dans l'état $|0\rangle$

On a :

$$
\begin{aligned}
|(\langle\vec{r}| \otimes \langle 0|)(|\psi_1\rangle \otimes |0\rangle + |\psi_2\rangle \otimes |0\rangle)|^2 &= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle\langle 0|0\rangle + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle\langle 0|0\rangle|^2 \\
&= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle|^2 \\
&= (\langle\vec{r}|\psi_1\rangle + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle)\overline{(\langle\vec{r}|\psi_1\rangle + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle)} \\
&= (\langle\vec{r}|\psi_1\rangle + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle)(\overline{\langle\vec{r}|\psi_1\rangle} + \overline{\langle\vec{r}|\psi_2\rangle}) \\
&= |\langle\vec{r}|\psi_1\rangle|^2 + \langle\vec{r}|\psi_1\rangle\overline{\langle\vec{r}|\psi_2\rangle} + \langle\vec{r}|\psi_2\rangle\overline{\langle\vec{r}|\psi_1\rangle} + |\langle\vec{r}|\psi_2\rangle|^2 \\
&= \frac{2A^2}{D^2} + \frac{A^2}{D^2}e^{-ik(|\vec{r}-\vec{r_2}|-|\vec{r}-\vec{r_1}|)} + \frac{A^2}{D^2}e^{ik(|\vec{r}-\vec{r_2}|-|\vec{r}-\vec{r_1}|)} \\
&= \frac{A^2}{D^2}(2 + 2\cos(k(|\vec{r}-\vec{r_2}| - |\vec{r}-\vec{r_1}|))) \\
&= \frac{A^2}{D^2}(2 + 2\cos(kd\sin\theta))
\end{aligned}
$$

On observe donc à nouveau des franges d'interférences !

Exercice 2 *Condition de quantification de Bohr*

Pour une orbite circulaire, la loi de mouvement de Newton stipule :

$$m\frac{v^2}{R} = k\frac{Ze^2}{R^2}$$

où k est la constante de Coulomb et R le rayon de l'orbite, Ze la charge du noyau ($Z = 1$ pour l'hydrogène) et e la charge électrique. De plus l'énergie mécanique (totale) vaut

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k\frac{Ze^2}{R}$$

Exprimons d'abord l'énergie d'une orbite de rayon R en fonction de son rayon,

$$v^2 = \frac{k}{m}\frac{Ze^2}{R},$$

donc

$$E = \frac{1}{2}k\frac{Ze^2}{R} - k\frac{Ze^2}{R} = -\frac{k}{2}\frac{Ze^2}{R}$$

Nous trouvons les rayons permis à partir de la condition de quantification de Bohr. Le long de l'orbite circulaire $p = mv = m\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\sqrt{Ze^2}}{\sqrt{R}}$. D'autre part $q = R\theta$ en coordonnées polaires pour la position. Ainsi :

$$\begin{aligned}\oint pdq &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{mkZe^2}{R}} R \ \ d\theta \\ &= 2\pi\sqrt{mkRZe^2}\end{aligned}$$

Si l'on pose $\oint pdq = nh$ on trouve :

$$R_n = \frac{n^2\hbar^2}{kZe^2m}, \qquad n \geq 1$$

C'est un ensemble discret de rayons permis. Les énergies associées sont donc

$$E = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{R_n} = -\frac{k}{2}\frac{Ze^2}{n^2\hbar^2} \cdot kZe^2m$$

C'est-à-dire

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} = -Ry\frac{Z^2}{n^2}.$$

Dans cette formule $Ry = \dfrac{mk^2e^4}{2\hbar^2}$ est la constante de Rydberg. Elle vaut environnement$Ry \approx 13,6eV$.