Série 12
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Création d'intrication grâce à une interaction magnétique.*

On considère deux spins $\frac{1}{2}$ nucléaires avec Hamiltonien d'interaction $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$. L'opérateur d'évolution de ce système est $U = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}\right)$.

Soit
$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$$
l'état initial des deux spins.

1. Montrez que l'état après un temps $\tau = \frac{\pi}{4J}$ est
$$|\psi_\tau\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - i\,|\uparrow\downarrow\rangle + i\,|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)$$

2. Montrez que cet état est intriqué, c'est à dire qu'il est impossible de l'écrire sous la forme $(\alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle) \otimes (\gamma\,|\uparrow\rangle + \delta\,|\downarrow\rangle)$.

Exercice 2 *Refocusing*

Dans cet exercice $\mathcal{H}$ est toujours l'Hamiltonien précédent. Soit $R_1 = i\exp\left(-i\pi\frac{\sigma_1^x}{2}\right) = \sigma_1^x$, le π-pulse (ou bien rotation autour de x) agissant sur le premier spin. On considère l'évolution des deux spins pendant un temps $\frac{t}{2}$, suivi d'un π-pulse, suivi de l'évolution pendant un temps $\frac{\tau}{2}$, et suivi à nouveau d'un π-pulse. L'évolution totale est
$$U_{tot} = (R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-i\frac{t}{2}\frac{\mathcal{H}}{\hbar}}\, (R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-i\frac{t}{2}\frac{\mathcal{H}}{\hbar}}$$

1. Montrez maintenant l'identité générale valable pour tout t :
$$(R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}}\, (R_1 \otimes \mathbb{I}_2)\, e^{-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}} = \mathbb{I}_1 \otimes \mathbb{I}_2$$

2. En pratique $J << 1$. Cela entraîne une interprétation physique de cette identité. Pouvez-vous en dire quelques mots ?

Exercice 3 *Réalisation de la porte SWAP*

La porte est importante car elle permet d'échanger les q-bits dans un circuit. Elle est définie dans la base computationelle par

$$\mathrm{SWAP}\,|x,y\rangle = |y,x\rangle$$

a) Démontrez que cette opération est unitaire et donnez sa matrice correspondante.

b) Nous allons montrer qu'elle peut être réalisée grâce à l'Hamiltonien de Heisenberg

$$H = \hbar J \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

Calculez l'opérateur d'évolution des deux spins

$$U = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right)$$

et montrez que l'on obtient SWAP pour $t_0 = \pi/4J$

Formules utiles :

– Pour une matrice par bloc (à démontrer)

$$\exp\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \exp(A) & 0 \\ \hline 0 & \exp(B) \end{array}\right)$$

– Formule d'Euler généralisée

$$\exp(i\alpha\sigma_k) = I\cos\alpha + i\sigma_k \sin\alpha$$

c) On peut aussi réaliser SWAP grâce à 3 portes CNOT. Donnez le circuit correspondant.

Remarque : réciproquement on peut réaliser CNOT à partir de $\sqrt{\mathrm{SWAP}}$ et des manipulations à 1 q-bit. Ainsi $\sqrt{\mathrm{SWAP}}$ joue aussi le rôle de porte universelle (mais pas SWAP lui-même.