Solution de la série 11
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Le code de Steane*

(a) La matrice de parité du code de Hamming $(7,4)$ est donné par tous vecteurs non nuls à r composantes pour $2^r - 1 = 7$, c.à.d. $r = 3$:

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

La matrice génératrice de $C_2 = C_1^\perp$ est donné par des vecteurs perpendiculaires à C_1. Comme un vecteur de C_1 satisfait $H_1\vec{x} = \vec{0}$, les lignes de H_1 sont 3 vecteurs $\perp$ à C_1. Notons que C_1 est de dimension 4, donc $C_1^\perp$ est de dimension $7-4=3$. Donc il suffit de prendre les 3 lignes de H_1 comme matrice génératrice de $C_1^\perp$:

$$G_2 = H_1^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Les mots de code de C_2 sont donnés par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_2 + u_3 \\ u_1 + u_3 \\ u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 + u_3 \end{bmatrix} \tag{1}$$

avec $(u_1, u_2, u_3) \in \{0,1\}^3$. La liste des mots de codes de C_2 est (0000000), (1001101), (0101011), (0010111), (0111100), (1011010), (1100110), (1110001).

Pour montrer que $C_2 \subset C_1$, il suffit de montrer que (vérifiez !)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \\ u_2 + u_3 \\ u_1 + u_3 \\ u_1 + u_2 \\ u_1 + u_2 + u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

(où on prend les sommes mod 2 comme d'habitude).

Finalement C_1 corrige 1 erreur, car toutes paires de colonnes de H_1 sont indépendantes, et la 4ème est combinaison linéaire des deux premières, et donc $d = 3$ (et $t = 1$).

De plus, $C_2^\perp = (C_1^\perp)^\perp = C_1$ et corrige aussi 1 erreur.

(b) Le code CSS(C_2, C_1) possède les paramètres : $n = 7$ (longueur), dim$\mathcal{H} = 2^7$ ($\mathcal{H}$ l'espace de Hilbert des 7 qubits).

$k_1 - k_2 = \text{dim}C_1 - \text{dim}C_2 = 4 - 3 = 1$. Le code CSS$(C_2, C_1)$ est un sous-space vectoriel de $\mathcal{H}$ de dimension $2^1 = 2$. Le code corrige $t = 1$ erreur.

(c) **Mots de code :**

La classe d'équivalence de $\vec{x} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \in C_1$ est :

$$\begin{aligned} |0\rangle_{\text{Steane}} &= \frac{1}{\sqrt{|C_2|}} \sum_{y \in C_2} |\vec{y}\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \Big\{ |0000000\rangle + |1001101\rangle + |0101011\rangle + |0010111\rangle + \\ &\qquad + |0111100\rangle + |1011010\rangle + |1100110\rangle + |1110001\rangle \Big\}. \end{aligned}$$

où on a utilisé la liste des 8 mots de code de C_2 donnée par eq. 1.

Avec $\vec{x} = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \in C_1$ (vérifiez) on a un mot de C_1 qui n'est pas dans C_2 (vérifiez). Sa classe d'équivalence donne l'autre vecteur indépendant du code de Steane :

$$\begin{aligned} |1\rangle_{\text{Steane}} &= \frac{1}{\sqrt{|C_2|}} \sum_{\vec{y} \in C_2} |y\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{8}} \Big\{ |1111111\rangle + |0110010\rangle + |1010100\rangle + |1101000\rangle + \\ &\qquad + |1000011\rangle + |0100101\rangle + |0011001\rangle + |0001110\rangle \Big\}. \end{aligned}$$

Un mot de code général est (sous-espace vectoriel de dim 2)

$$|\psi\rangle = \alpha\, |0\rangle_{\text{Steane}} + \beta\, |1\rangle_{\text{Steane}}$$

avec $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1; \alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Ce code utilise 7 qubits pour corriger $t = 1$ erreur sur un qubit.