Série 11
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Révision sur la sphère de Bloch*

- Représentez sur la sphère de Bloch les vecteurs des bases X, Y et Z.
- Calculez explicitement les matrices $\exp(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x)$, $\exp(-i\frac{\beta}{2}\sigma_y)$, $\exp(-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z)$.
- Considérez le qubit $|\psi\rangle = (\cos\frac{\theta}{2})|\uparrow\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}}(\sin\frac{\theta}{2})|\downarrow\rangle$. Représentez l'action des matrices $\exp(-i\frac{\alpha}{2}\sigma_x)$ et $\exp(-i\frac{\gamma}{2}\sigma_z)$ sur ce vecteur.

Exercice 2 *Hamiltonien d'interaction de deux spins 1/2*

Dans certaines situations l'Hamiltonien d'interaction de deux spins 1/2 est donné par

$$\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$$

ou J est une constante (unité de la frqùence, et $\hbar J$ unité d'énergie). Cette expression fait intervenir le produit tensoriel entre les matrices de Pauli. Cet Hamiltonien intervient dans la réalisation de la porte CNOT (voir prochain exercice).

- Donnez l'expression explicite de la matrice (en composantes) de cet Hamiltonien dans la base canonique.
- Donnez l'expression de l'Hamiltonien dans le formalisme des kets et bras de Dirac. Pour cela on écrira d'abord la décomposition spectrale des deux matrices de Pauli.
- Quelles sont les valeurs propres et vecteurs propres de cet Hamiltonien.

Exercice 3 *Identité utile pour la réalisation expérimentale de la porte CNOT par RMN*

Dans cet exercice nous prouvons une identité utile à la réalisation expérimentale de la porte CNOT. Elle formera la base de la discussion du cours.

On considère deux qubits (par exemple : spins 1/2, systèmes à deux niveaux) et les opérateurs suivants :

- Rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe z pour chaque spin

$$R_1 = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_1^z}{2}\right) \text{ et } R_2 = \exp(-i\frac{\pi}{2}\frac{\sigma_2^z}{2})$$

- Porte de Hadamard H.

- L'opérateur d'évolution

$$U = \exp\left(-i\frac{t}{\hbar}\mathcal{H}\right)$$

associé à l'hamiltonien d'interaction pour deux spins $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$. On laisse évoluer le système pendant un temps $t = \frac{\pi}{4J}$.

Dessinez le circuit correspondant au produit des matrices

$$(I_{2\times 2} \otimes H)\, U\, (R_1 \otimes R_2)\, (I_{2\times 2} \otimes H)$$

puis calculez ce produit et montrez qu'il est égal à une matrice 4×4 équivalente à la porte CNOT