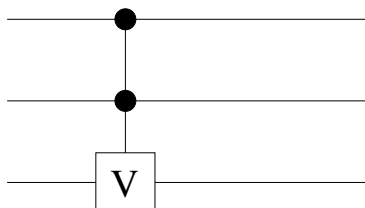


Série 10
Traitement quantique de l'information

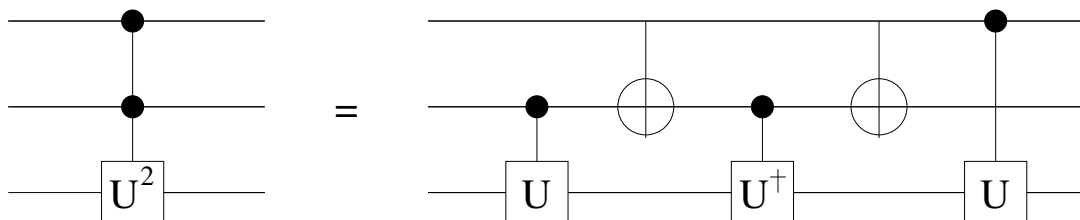
Exercice 1 *Porte de Toffoli CCNOT*

Soit V une matrice 2×2 unitaire.

La porte "double contrôle- V " notée CCV est définie par le circuit suivant :



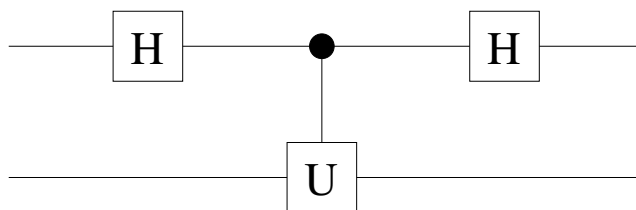
a) Montrez que pour tout U unitaire 2×2 :



b) Comment choisir U pour réaliser la porte de Toffoli CCNOT ? Donnez explicitement une telle matrice U .

Exercice 2 *Un petit algorithme quantique*

Soit U une matrice unitaire et $|u\rangle$ un vecteur propre, c'est à dire $U|u\rangle = \exp(2\pi i\varphi)|u\rangle$.
Considérez le circuit suivant :



- a) Calculez la sortie pour l'état initial $|0\rangle \otimes |u\rangle$.
- b) Calculez la probabilité d'observer le premier bit dans l'état $|0\rangle$ à la sortie.
- c) Supposons que l'on remplace U par U^k , k entier dans le circuit ci-dessus. Soit $\varphi = 0, \varphi_1\varphi_2\dots\varphi_t$ le développement binaire de $0 < \varphi < 1$, c'est à dire

$$\varphi = \frac{\varphi_1}{2} + \frac{\varphi_2}{2^2} + \dots + \frac{\varphi_t}{2^t}$$

avec $\varphi_i \in \{0, 1\}$ (notez : ici φ est une fraction et son développement binaire est fini). Comment choisir k pour déterminer le bit le moins significatif φ_t en une seule mesure ?

Indication : calculez d'abord la sortie du circuit quand U est remplacé par U^k .