Solution de la série 1
Traitement Quantique de l'Information

Exercice 1 *Expérience de Young*

1. Intensité reçue en P

Le schéma de l'expérience est le suivant :

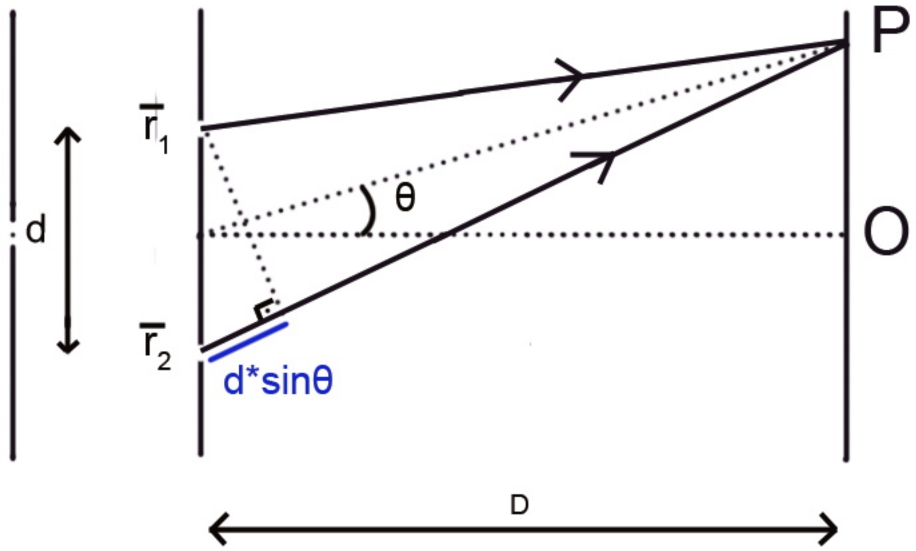

FIGURE 1 – Double fente de Young

L'intensité lumineuse reçue en P est

$$|\phi_1(\vec{r}_P) + \phi_2(\vec{r}_P)|^2 = I(\vec{r}_P)$$

Si $D >> d$ on peut utiliser l'approximation

$$I(\vec{r}_P) \approx \frac{A^2}{D^2} |e^{i(k|\vec{r_P}-\vec{r}_1|-\omega t)} + e^{i(k|\vec{r_P}-\vec{r}_2|-\omega t)}|^2$$

En factorisant la première exponentielle et en utilisant que son module vaut 1 on trouve :

$$I(\vec{r}_P) \approx \frac{A^2}{D^2} |1 + e^{ik(|\vec{r_P}-\vec{r}_2|-|\vec{r_P}-\vec{r}_1|)}|^2$$

La différence $|\vec{r_P} - \vec{r}_2| - |\vec{r_P} - \vec{r}_1|$ est égale à la différence de la longueur entre les deux "rayons lumineux" de la figure. Cette différence est approximativement égale à $d \sin\theta$. Donc :

$$I(\vec{r}_P) \approx \frac{A^2}{D^2} |1 + e^{ik\sin\theta}|^2 = \frac{A^2}{D^2} \left\{(1 + \cos(kd\sin\theta))^2 + \sin^2(kd\sin\theta)\right\} = \frac{A^2}{D^2} \left\{2 + 2\cos(kd\sin\theta)\right\}$$

En utlisant $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ on trouve :

$$I(\vec{r}_P) = \frac{4A^2}{D^2}\cos^2\left(\frac{kd}{2}\sin\theta\right)$$

et puisque $k = 2\pi/\lambda$ on obtient finalement :

$$I(\vec{r}_P) \approx \frac{4A^2}{D^2}\cos^2\left(\frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}\right).$$

2. Condition sur θ

Le cosinus vaut ± 1 quand $\frac{d}{\lambda}\sin\theta = m \in \mathbb{N}$, donc on obtient un max (puisque $(\pm 1)^2 = +1$) pour

$$\sin\theta = m\frac{\lambda}{d}$$

Les minimas sont égaux à zéro et sont atteints pour

$$\sin\theta = (m + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{d}.$$

Sur l'écran on observera des franges circulaires claires (maximas de l'intensité) et sombres (minimas de l'intensité).

3. Intensité en fonction de ρ

On a $\tan\theta = \dfrac{\rho}{D}$. Puisque θ est petit quand $D >> d$ on utilise l'approximation $\tan\theta \approx \theta \approx \sin\theta$, si bien que

$$I(\vec{r}_P) = \frac{4A^2}{D^2}\cos^2\left(\frac{\pi d \rho}{D\lambda}\right).$$

Les maximas sont donnés par $\dfrac{d}{D}\dfrac{\rho_m}{\lambda} = m$. Donc la distance séparant deux franges successives est :

$$\rho_{m+1} - \rho_m = \lambda\frac{D}{d}.$$

Connaissant cette distance ainsi que D et d, on peut déduire la longueur d'onde λ.

Exercice 2 *Condition de quantification de Bohr*

Pour une orbite circulaire, la loi de mouvement de Newton stipule :

$$m\frac{v^2}{R} = k\frac{Ze^2}{R^2}$$

où k est la constante de Coulomb et R le rayon de l'orbite, Ze la charge du noyau ($Z = 1$ pour l'hydrogène) et e la charge électrique. De plus l'énergie mécanique (totale) vaut

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - k\frac{Ze^2}{R}$$

Exprimons d'abord l'énergie d'une orbite de rayon R en fonction de son rayon,

$$v^2 = \frac{k}{m}\frac{Ze^2}{R},$$

donc

$$E = \frac{1}{2}k\frac{Ze^2}{R} - k\frac{Ze^2}{R} = -\frac{k}{2}\frac{Ze^2}{R}$$

Nous trouvons les rayons permis à partir de la condition de quantification de Bohr. Le long de l'orbite circulaire $p = mv = m\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{\sqrt{Ze^2}}{\sqrt{R}}$. D'autre part $q = R\theta$ en coordonnées polaires pour la position. Ainsi :

$$\begin{aligned}\oint pdq &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{mkZe^2}{R}} R \ d\theta \\ &= 2\pi\sqrt{mkRZe^2}\end{aligned}$$

Si l'on pose $\oint pdq = nh$ on trouve :

$$R_n = \frac{n^2\hbar^2}{kZe^2m}, \qquad n \geq 1$$

C'est un ensemble discret de rayons permis. Les énergies associées sont donc

$$E = -\frac{1}{2}\frac{Ze^2}{R_n} = -\frac{k}{2}\frac{Ze^2}{n^2\hbar^2} \cdot kZe^2m$$

C'est-à-dire

$$E_n = -\frac{mk^2e^4}{2\hbar^2}\frac{Z^2}{n^2} = -Ry\frac{Z^2}{n^2}.$$

Dans cette formule $Ry = \dfrac{mk^2e^4}{2\hbar^2}$ est la constante de Rydberg. Elle vaut environnement$Ry \approx 13,6eV$.

Exercice 3 *Effet Photoélectrique*

1. Longueur d'onde et fréquence minimales

Si la longueur d'onde maximale pour éjecter un électron hors du tungstène est de $\lambda_0 \approx 230$ nm la fréquence minimale à partir de laquelle l'effet photoélectrique est observé est de $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$. C'est à dire avec $c \approx 3 \times 10^8$ m/s ; $\nu_0 \approx \dfrac{3 \times 10^8}{230 \times 10^{-9}}$ s^{-1} ou bien $\nu_0 \approx 10^{16}$ Hz environ pour l'ordre de grandeur.

2. Energie cinétique des électrons

Selon la formule d'Einstein, l'énergie cinétique des électrons éjectés est :

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - W_0.$$

Ici W_0 est l'énergie minimale d'extraction, donc $W_0 = h\nu_0$. On trouve alors $h\nu = \dfrac{1}{2}mv^2 + h\nu_0$ c'est à dire $hc/\lambda = \dfrac{1}{2}mv^2 + h\nu_0$. Donc

$$\lambda = (\frac{1}{2}mv^2 + h\nu_0)^{-1}hc.$$

On vous laisse faire l'application numérique avec $\frac{1}{2}mv^2 = 1.5$ eV.

Exercice 4 *Expérience de Young modernes*

1. Longueur de De Broglie du C60

La longueur d'onde de De Broglie est $\lambda = \frac{h}{p}$. Pour une molécule $p = mv$ où $m = \frac{M_{mole}}{N_A}$. Donc $\lambda = \frac{hN_A}{M_{mole}v}$. Faites l'application numérique !

2. Observations sur lécran

Il suffit de reprendre les résultats connus pour les ondes. On devrait observer des franges d'interférences avec une distance interfrange de l'ordre de $\rho_{m+1} - \rho_m = \lambda \frac{D}{d}$. Les résultats expérimentaux montrent que ce résultat est correct.

3. Longueur de De Broglie d'un ballon de football

L'application numérique montre que la longueur de De Broglie d'un ballon de football est d'environ $\lambda \approx 10^{-20}$ m. Ces distances ne sont pas mesurables. Parfois on attribue ces distances minuscules aux particules élementaires.