Test Intermédiaire

(45 min)

NOM :
PRENOM :

- Vous avez 2h : 8h15 - 10h15.
- Il y a 4 exercices. Lisez les tous avant de commencer dans l'ordre qui vous convient le mieux.
- Rédigez vos réponses au propre sous la donnée de chaque exercice.
- Rendez aussi vos feuilles de brouillon.
- Justifiez vos réponses et détaillez vos calculs.
- Chaque problème possède le même poids.

Conventions

- Le nombre imaginaire pur sera noté i (c.a.d. $i^2 = -1$).
- Par convention $|0\rangle$, $|\uparrow\rangle$ ou $|h\rangle$ sont égals à $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$. Et $|1\rangle$, $|\downarrow\rangle$ ou $|v\rangle$ sont égals à $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Les formules suivantes peuvent éventuellement être utiles :

a) On rappelle les formules d'Euler pour θ un nombre réel.

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

et

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \ \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

b) Les trois matrices de Pauli sont

$$\sigma_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix}, \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}.$$

La matrice identité est notée $I = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$. Si $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$ est un vecteur unité et $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ on a

$$\vec{n}\cdot\vec{\sigma} = n_x\sigma_x + n_y\sigma_y + n_z\sigma_z.$$

De plus la formule d'Euler généralisée est valable (t un nombre réel)

$$e^{it\vec{n}\cdot\vec{\sigma}} = (\cos t)I + i(\sin t)\vec{n}\cdot\vec{\sigma}.$$

c) Si A est une matrice hermitienne, $\alpha_1, ..., \alpha_n$ ses valeurs propres et $|\phi_1\rangle$,...,$|\phi_n\rangle$ les vecteurs propres correspondants, on a la décomposition spectrale

$$A = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j |\phi_j\rangle\langle\phi_j|.$$

Pour une fonction $F(\cdot)$ (par exemple $F(x) = \exp(x)$) :

$$F(A) = \sum_{j=1}^{n} F(\alpha_j)|\phi_j\rangle\langle\phi_j|.$$

d) Le produit tensoriel entre deux vecteurs est donné par

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 \\ a_1 b_2 \\ a_2 b_1 \\ a_2 b_2 \end{pmatrix}$$

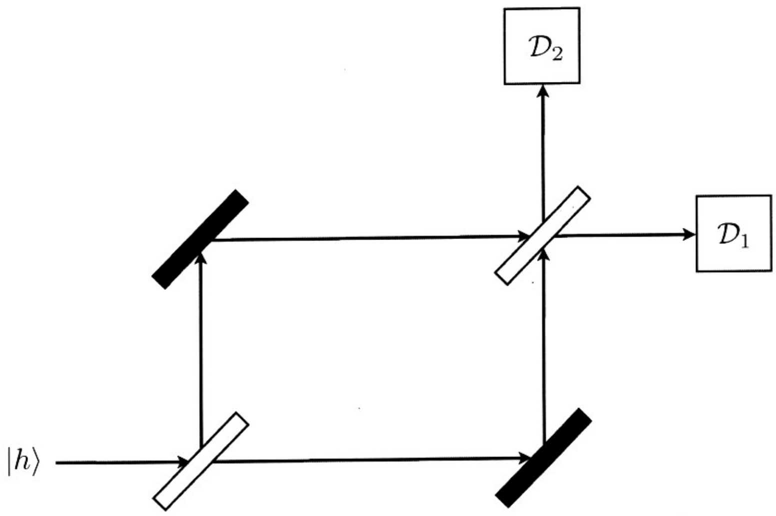
Le produit tensoriel entre deux matrices 2×2 est donné par :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Exercice 1 *Interféromètre de Mach-Zehnder.*

Considérez l'interféromètre de Mach-Zehnder de la figure ci-dessous. On suppose qu'un photon est envoyé sur le mirroir semi-transparent à gauche. Ensuite celui-ci est réfléchi par deux miroirs réfléchissants, puis arrive sur le miroir semi-tranparent à droite. Il est finalement capturé dans les détecteurs D_1 et/ou D_2.

L'espace d'Hilbert du photon est modélisé par l'espace bidimensionnel $\mathbf{C}^2$ de base canonique $|h\rangle$, $|v\rangle$, correspondant aux trajectoires "horizontales" et "verticales" du photon. Les mirroirs semi-transparents sont modélisés par la "matrice de Hadamard imparfaite" $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & e^{i\phi} \\ 1 & -e^{i\phi}\end{pmatrix}$. Les mirroirs réfléchissants sont modélisés par la matrice $X = \begin{pmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{pmatrix}$.



(a) Expliquez et justifiez pourquoi le choix ci-dessus de la "matrice de Hadamard imparfaite" est compatible avec les principes de la physique quantique

(b) Représentez la situation expérimentale du schéma comme un circuit quantique.

(c) L'état initial du photon est $|h\rangle$. Calculez les probabilités que le photon soit détecté dans D_1, dans D_2 en fonction de ϕ.

Solution pour l'exercice 1 :

(a) $H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & e^{i\phi} \\ 1 & -e^{i\phi}\end{pmatrix}$ et $H^+ = H^{T,*} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ e^{-i\phi} & -e^{-i\phi}\end{pmatrix}$

Il faut vérifier que H est unitaire c.a.d $HH^+ = H^+H = \mathbb{1}$.

$HH^+ = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & e^{i\phi} \\ 1 & -e^{i\phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 \\ e^{-i\phi} & -e^{-i\phi}\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$

idem pour $H^+H = \mathbb{1}$.

Solution exercice 1 suite :

Solution exercice 1 suite :

(b)

$$|h\rangle \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \boxed{X} \longrightarrow \boxed{H} \longrightarrow \text{appareil de détection.}$$

(c) Soit $|h\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|v\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$H|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & e^{i\phi} \\ 1 & -e^{i\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + |v\rangle).$$

$$H|v\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & e^{i\phi} \\ 1 & -e^{i\phi} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e^{i\phi} \\ -e^{i\phi} \end{pmatrix} = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}(|h\rangle - |v\rangle).$$

$$H|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|h\rangle + |v\rangle).$$

$$XH|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v\rangle + |h\rangle).$$

$$HXH|h\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(H|v\rangle + H|h\rangle) = \frac{e^{i\phi}}{2}(|h\rangle - |v\rangle) + \frac{1}{2}(|h\rangle + |v\rangle)$$

$$= \underbrace{\frac{e^{i\phi}+1}{2}}\,|h\rangle + \underbrace{\frac{e^{i\phi}-1}{2}}\,|v\rangle.$$

$$= e^{i\frac{\phi}{2}}\,\frac{e^{i\frac{\phi}{2}} + e^{-i\frac{\phi}{2}}}{2}\,|h\rangle + e^{i\frac{\phi}{2}}\,\frac{e^{i\frac{\phi}{2}} - e^{-i\frac{\phi}{2}}}{2}\,|v\rangle$$

$$\Longrightarrow \quad HXH|h\rangle = e^{i\frac{\phi}{2}}\left(\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)|h\rangle + \left(\sin\frac{\phi}{2}\right)|v\rangle\right).$$

phase globale.

$$\text{Prob}(h) = \cos^2\frac{\phi}{2} \quad \text{et} \quad \text{Prob}(v) = \sin^2\frac{\phi}{2}. \qquad \blacksquare$$

Solution exercice 1 suite :

Exercice 2 *Réalisation de la porte SWAP*

La porte est importante car elle permet d'échanger les q-bits dans un circuit. Elle est définie dans la base computationelle avec les vecteurs $|0,0\rangle$, $|0,1\rangle$, $|1,0\rangle$, $|1,1\rangle$.

$$\mathrm{SWAP}\,|x,y\rangle = |y,x\rangle\,, \qquad x,y \in \{0,1\}$$

(a) Démontrez que cette opération est unitaire.

(b) Donnez sa matrice correspondante en notation de Dirac et sous forme de tableau.

Solution pour l'exercice 2 :

(a) Pour l'unitarité il suffit de montrer que le produit scalaire est conservé c-à-d

$$\langle \phi' | (\mathrm{SWAP})^{\dagger}\, \mathrm{SWAP} | \phi \rangle = \langle \phi' | \phi \rangle .$$

Il suffit de montrer cela pour les états de base computationelle ;

$$\langle x', y' | (\mathrm{SWAP})^{\dagger}\, \mathrm{SWAP} | x, y \rangle \overset{?}{=} \langle x' y' | x y \rangle$$

On a :

$$\begin{aligned} &\langle x' y' | (\mathrm{SWAP})^{\dagger}\, \mathrm{SWAP} | x y \rangle \\ &= \langle y' x' | y x \rangle = \langle y' | y \rangle \langle x' | x \rangle \\ &= \langle y | y' \rangle \langle x | x' \rangle \quad \text{car ces prod. sont réels !} \\ &= \langle x | x' \rangle \langle y | y' \rangle \\ &= \langle x y | x' y' \rangle . \end{aligned}$$

(b) Les éléments de matrice sont

$$\langle x' y' | \mathrm{SWAP} | x y \rangle = \langle x' y' | y x \rangle = \delta_{x' y}\, \delta_{y' x} .$$

Sous forme de tableau :

Solution exercice 2 suite :

Solution exercice 2 suite :

(b) suite

$$
\mathrm{SWAP} = \begin{array}{c|cccc}
 & 00 & 01 & 10 & 11 \\
\hline
00 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
01 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
10 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
11 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}.
$$

En Notation de Dirac :

$$
\begin{aligned}
\mathrm{SWAP} &= 1\,|00\rangle\langle 00| + 1\,|01\rangle\langle 10| + 1\,|10\rangle\langle 10| + 1\,|11\rangle\langle 11| \\
&= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 10| + |11\rangle\langle 11| .
\end{aligned}
$$

$\blacksquare$

Solution exercice 2 suite :

Exercice 3 *Evolution de deux spins et intrication*

On considère deux spins $\frac{1}{2}$ nucléaires avec Hamiltonien d'interaction $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z$. L'opérateur d'évolution de ce système est $U = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}\right)$.

Pour la question b) on prendra l'état initial des deux spins :

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)$$

Notez aussi que la question c) peut être résolue indépendemment de a) et b).

(a) Représentez les matrices $\mathcal{H}$ puis U comme un tableau matriciel ou bien en notation de Dirac (au choix).

(b) Montrez que l'état après un temps $t = \frac{\pi}{4J}$ est (indication : $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$)

$$|\psi_t\rangle = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4}}}{2}\left(|\uparrow\uparrow\rangle - i\,|\uparrow\downarrow\rangle + i\,|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right)$$

(c) Montrez que cet état est intriqué, c'est à dire qu'il est impossible de l'écrire sous la forme $(\alpha\,|\uparrow\rangle + \beta\,|\downarrow\rangle) \otimes (\gamma\,|\uparrow\rangle + \delta\,|\downarrow\rangle)$.

Solution pour l'exercice 3 :

(a) $\mathcal{H} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z = \hbar J \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$$= \hbar J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\hbar J & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\hbar J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hbar J \end{pmatrix}$$

Puisque la Matrice est diagonale :

$$U = \exp\left(-\frac{it}{\hbar}\mathcal{H}\right) = \begin{pmatrix} e^{-itJ} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{itJ} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{itJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-itJ} \end{pmatrix}.$$

En Notation de Dirac

$\mathcal{H} = \hbar J\,|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| - \hbar J\,|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| - \hbar J\,|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + \hbar J\,|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|$

$U = e^{-itJ}\,|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + e^{itJ}\,|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + e^{itJ}\,|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + e^{-itJ}\,|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|$

Solution exercice 3 suite :

Solution exercice 3 suite :

b) Montrer l'évolution au temps t :

$$\mathcal{U}|\psi_0\rangle = |\psi_t\rangle \quad \text{avec} \quad |\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \otimes \frac{(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\big(|\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\big).$$

$$\Rightarrow \mathcal{U}|\psi_0\rangle = |\psi_t\rangle = \frac{1}{2}e^{-itJ}|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{1}{2}e^{itJ}|\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{2}e^{itJ}|\downarrow\uparrow\rangle - \frac{1}{2}e^{itJ}|\downarrow\downarrow\rangle.$$

Pour $t = \frac{\pi}{4J}$:

$$|\psi_t\rangle = \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}|\uparrow\uparrow\rangle - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}|\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}|\downarrow\uparrow\rangle - \frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}|\downarrow\downarrow\rangle$$

$$= \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left\{|\uparrow\uparrow\rangle - e^{i\frac{\pi}{2}}|\uparrow\downarrow\rangle + e^{i\frac{\pi}{2}}|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right\}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left\{|\uparrow\uparrow\rangle - i|\uparrow\downarrow\rangle + i|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\right\}.$$

Solution exercice 3 suite :

c) Montrons que l'état est intriqué.

Supposons par l'absurde que :

$$|\uparrow\uparrow\rangle - i|\uparrow\downarrow\rangle + i|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle = (\alpha|\uparrow\rangle + \beta|\downarrow\rangle)\otimes(\gamma|\uparrow\rangle + \delta|\downarrow\rangle)$$

$$= \alpha\gamma|\uparrow\uparrow\rangle + \alpha\delta|\uparrow\downarrow\rangle + \beta\gamma|\downarrow\uparrow\rangle + \beta\delta|\downarrow\downarrow\rangle$$

Alors
$$\begin{cases} \alpha\gamma = 1 \\ \alpha\delta = -i \\ \beta\gamma = i \\ \beta\delta = -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow \dfrac{\gamma}{\delta} = -\dfrac{1}{i} = i$ et $\dfrac{\gamma}{\delta} = \dfrac{i}{-1} = -i$

$\Rightarrow \dfrac{\gamma}{\delta} = -\dfrac{\gamma}{\delta} \Rightarrow \gamma\delta = -\gamma\delta \Rightarrow \gamma\delta = 0$

$\Rightarrow \gamma = 0$ ou $\delta = 0$ Mais alors $\alpha . 0 = 1 \Rightarrow 0 = 1$ contradiction

ou bien $\beta . 0 = -1 \Rightarrow 0 = -1$ contradiction

Exercice 4 *Variation sur le problème de Deutsch-Josza*

En 1993 E. Bernstein et U. Vazirani (Proc, 25th Annual ACM Symposium on the Theory of Computing, ACM Press, NY p11-20) formulèrent le problème suivant. On se donne un "oracle" qui calcule

$$f(x_1, x_2) = (a_1x_1 \oplus a_2x_2) \oplus b \mod 2$$

pour chaque entrée $(x_1, x_2) \in \mathbb{F}_2^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$. Ici $(a_1, a_2) \in \mathbb{F}_2^2$ et $b \in \mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. Le but est de calculer $\underline{a}$ en posant le moins de questions possibles à l'oracle (pour fixer les idées on suppose b connu et (a_1, a_2) inconnu).

(a) Combien de questions faut-il poser à l'oracle pour déterminer (a_1, a_2) classiquement ?

(b) On considère le circuit de Deutsch et Josza. Ce circuit réalise l'opération unitaire suivante :

$$(H \otimes H \otimes I)U_f(H \otimes H \otimes H)(I \otimes I \otimes NOT)$$

où $U_f|x_1, x_2, y\rangle = |x_1, x_2, y \oplus f(x_1, x_2)\rangle$. Faites un dessin du circuit correspondant.

(c) Calculez létat de sortie du circuit quand létat d'entrée est $|0,0,0\rangle$. Indication : il peut être utile de remarquer que pour $z \in \{0,1\}$ on a $|z\rangle - |1 \oplus z\rangle = (-1)^z(|0\rangle - |1\rangle)$

(d) On fait une seule mesure dans la base computationelle des deux premiers qubits de sortie du circuit. Montrer que cela suffit à déterminer (a_1, a_2) (avec probabilité 1).

(e) A-t-on besoin de savoir la valeur de b pour le succès de l'algorithme ? Si celle-ci n'est pas connue, est ce que cet algorithme permet de la déterminer ?

Solution pour l'exercice 4 :

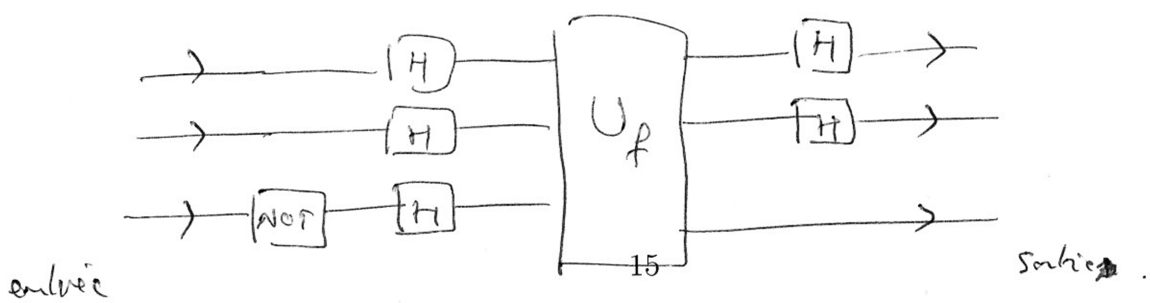
(a) Il faut résoudre l'équation $a_1x_1 \oplus a_2x_2 = f(x_1, x_2) \oplus b$.

avec des "questions" (x_1, x_2).

Comme on a 2 inconnues a_1 et a_2, il faut deux équations linéairement indépendantes.

$\Rightarrow$ <u>Au minimum 2 questions</u>;

(b)



Suite sur page 17

Solution exercice 4 suite :

$$= \frac{1}{4}\left((-1)^{b} + (-1)^{b\oplus a_2} + (-1)^{b\oplus a_1} + (-1)^{b\oplus a_1\oplus a_2} \right)|00\rangle$$

$$+ \frac{1}{4}\left((-1)^{b} - (-1)^{b\oplus a_2} + (-1)^{b\oplus a_1} - (-1)^{b\oplus a_1\oplus a_2} \right)|01\rangle$$

$$+ \frac{1}{4}\left((-1)^{b} + (-1)^{b\oplus a_2} - (-1)^{b\oplus a_1} - (-1)^{b\oplus a_1\oplus a_2} \right)|10\rangle$$

$$+ \frac{1}{4}\left((-1)^{b} - (-1)^{b\oplus a_2} - (-1)^{b\oplus a_1} + (-1)^{b\oplus a_1\oplus a_2} \right)|11\rangle$$

↑ état de sortie des deux premiers qubit.

(état du 3ème qubit $= \dfrac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$).

d) Mesure dans la base computationelle,

$$\text{prob}(00) = \frac{1}{4}\left| (-1)^{b} + (-1)^{b\oplus a_2} + (-1)^{b\oplus a_1} + (-1)^{b\oplus a_1\oplus a_2} \right|^2$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 = a_2 = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

indépendant de b car $|(-1)^b|^2 = 1$ toujours.

de même

$$\text{prob}(01) = \frac{1}{4}\left| (-1)^{b} - (-1)^{b\oplus a_2} + (-1)^{b\oplus a_1} - (-1)^{b\oplus a_1\oplus a_2} \right|^2$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 = 0 \text{ et } a_2 = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

suite page 18 →

Solution exercice 4 suite :

(C) Calcul de l'état de sortie :

$$(I\otimes I\otimes NOT)|0,0,0\rangle = |0,0,1\rangle$$

$$(H\otimes H\otimes H)(I\otimes I\otimes NOT)|0,0,0\rangle = H|0\rangle\otimes H|0\rangle\otimes H|1\rangle$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 (|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle-|1\rangle)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 (|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle)\otimes(|0\rangle-|1\rangle)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \Big(|00\rangle\otimes|0\rangle + |01\rangle\otimes|0\rangle + |10\rangle\otimes|0\rangle + |11\rangle\otimes|0\rangle$$

$$+ |01\rangle\otimes|1\rangle + |10\rangle\otimes|1\rangle + |11\rangle\otimes|1\rangle\Big)$$

$$- |00\rangle\otimes|1\rangle + |01\rangle\otimes|1\rangle$$

Appliquons U_f : cela donne l'état :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \Big(|00\rangle\otimes|b\rangle + |01\rangle\otimes|a_2\oplus b\rangle + |10\rangle\otimes|a_1\oplus b\rangle + |11\rangle\otimes|a_1\oplus a_2\oplus b\rangle$$

$$- |00\rangle\otimes|1\oplus b\rangle + |01\rangle\otimes|1\oplus a_2\oplus b\rangle + |10\rangle\otimes|1\oplus a_1\oplus b\rangle + |11\rangle\otimes|1\oplus a_1\oplus a_2\oplus b\rangle \Big)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \Big((-1)^b|00\rangle + (-1)^{a_2\oplus b}|01\rangle + (-1)^{a_1\oplus b}|10\rangle + (-1)^{a_1\oplus a_2\oplus b}|11\rangle \Big) \otimes (|0\rangle - |1\rangle)$$

↑ en utilisant la remarque — c'est le kick back phenomenon.

Appliquons les deux derniers Hadamard sur les 2 premiers qubits. Le dernier qubit $|0\rangle - |1\rangle$ n'est pas modifié et on ne l'écrit plus explicitement :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^4 \Big((-1)^b(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle) + (-1)^{a_2\oplus b}(|0\rangle+|1\rangle)\otimes(|0\rangle-|1\rangle)$$

$$+ (-1)^{a_1\oplus b}(|0\rangle-|1\rangle)\otimes(|0\rangle+|1\rangle) + (-1)^{a_1\oplus a_2\oplus b}(|0\rangle-|1\rangle)(|0\rangle-|1\rangle)\Big)$$

← suite sur la page précédente

Solution exercice 4 suite :

$$\text{prob}(10) = \frac{1}{4}\left|(-1)^b + (-1)^{b\oplus a_2} - (-1)^{b\oplus a_1} - (-1)^{b\oplus a_1\oplus a_2}\right|^2$$

$$= \frac{1}{4}\left|1 + (-1)^{a_2} - (-1)^{a_1} - (-1)^{a_1\oplus a_2}\right|^2$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 = 1 \text{ et } a_2 = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$\text{prob}(11) = \frac{1}{4}\left|1 - (-1)^{a_2} - (-1)^{a_1} + (-1)^{a_1\oplus a_2}\right|^2$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } a_1 = 1 \text{ et } a_2 = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi avec une mesure on tombe sur un état, disons

$|00\rangle \Rightarrow a_1 = 0$ et $a_2 = 0$ avec prob 1

$|01\rangle \Rightarrow a_1 = 0$ et $a_2 = 1$ "

$|10\rangle \Rightarrow a_1 = 1$ et $a_2 = 0$ "

$|11\rangle \Rightarrow a_1 = 1$ et $a_2 = 1$ ".

$\blacksquare$

e) Le calcul précédent montre que $(-1)^b$ est une phase globale qui n'est pas observable.

$\rightarrow$ on n'a pas besoin de connaître à l'avance la valeur de b !

$\rightarrow$ on ne peut en fait pas déterminer b par cette expérience !

$\blacksquare$