Traitement quantique de l'information II — EPFL Semestre de printemps 2011/2012

Dr. Nicolas Macris — 20 Avril 2011

Test Intermédiaire
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Réalisation d'un état intriqué par RMN (8 points)*

Soit $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ avec

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

les trois matrices de Pauli. Soit $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z)$ un vecteur de norme unité. Soit

$$R(\theta, \hat{n}) = \exp\left(i\frac{\theta}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\right) = \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)\mathbb{1} + i\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)\vec{\sigma}\cdot\hat{n},$$

où $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{\sigma}\cdot\hat{n} = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z$.

On rappelle que $R(\theta, \hat{n})$ peut être représentée sur la sphère de Bloch comme une rotation d'angle θ et d'axe $\hat{n}$, agissant sur le vecteur représentant l'état du spin.

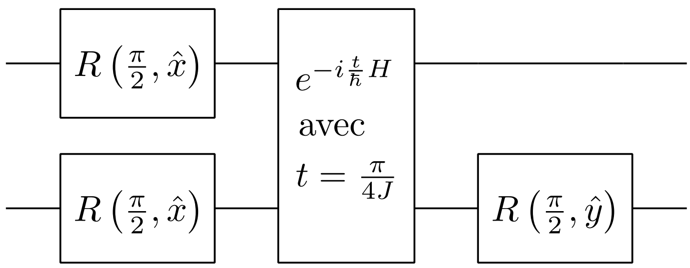
a) Calculez $R\left(\frac{\pi}{2}, \hat{x}\right)|\uparrow\rangle$ et $R\left(\frac{\pi}{2}, \hat{y}\right)|\uparrow\rangle$ où $\hat{x} = (1, 0, 0)$ et $\hat{y} = (0, 1, 0)$. Donnez le résultat en notation de Dirac.

b) Considérez deux spins nucléaires (en interaction) avec l'hamiltonien

$$H = \hbar J \sigma_z^{(1)} \otimes \sigma_z^{(2)} = \hbar J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Ici $\hbar$ est la constante de Planck et J est une constante de couplage).
Calculez $\exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right)$ et donnez le résultat en notation de Dirac.

c) Considerez le circuit suivant. Donnez l'état de sortie si les deux bits (spins) sont initialisés à $|\uparrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle$. Prendre $t = \frac{\pi}{4J}$.

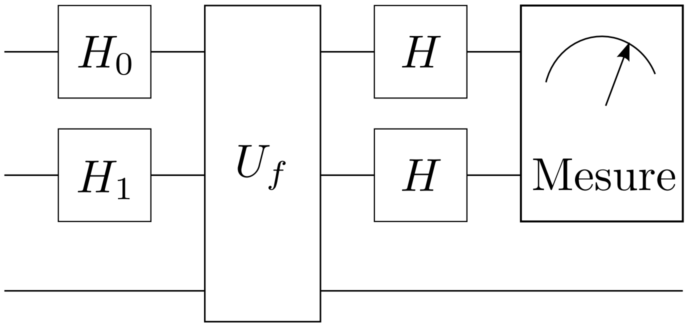


d) Montrez que l'état est intriqué.

Exercice 2 *Effet des imperfections sur l'algorithme de Simon (8 points)*

On considère le problème de Simon pour $n = 2$. Soit $H = \{\underline{x} \in \mathbb{F}_2^2 \mid \underline{x} = (0, x_2), \text{avec } x_2 \in \{0,1\}\}$. C'est le "sous-espace vectoriel caché" de $\mathbb{F}_2^2$. Soit $f : \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \{0,1\}$ telle que $f(\underline{x}) = f(\underline{y})$ si et seulement si $\underline{x} - \underline{y} \in H$. Pour fixer les idées on prendra la fonction $f(0,0) = f(0,1) = 0$ et $f(1,0) = f(1,1) = 1$.

Considérez le circuit (de l'algorithme de Simon) :



où H_0 et H_1 sont des portes de Hadamard *imparfaites* :

$$H_0 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + (-1)^b e^{i\phi_0} |1\rangle\right)$$
$$H_1 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + (-1)^b e^{i\phi_1} |1\rangle\right)$$

et ϕ_0 et ϕ_1 sont des phases dans $[0, 2\pi]$. Les deux dernières portes du circuit sont des portes de Hadamard standard

$$H |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + (-1)^b |1\rangle\right)$$

et $U_f |x_1, x_2\rangle \otimes |z\rangle = |x_1, x_2\rangle \otimes |z \oplus f(x_1, x_2)\rangle$. Le circuit est initialisé à $|0,0\rangle \otimes |0\rangle$.

a) Calculez l'état juste après les deux premières portes de H_0 et H_1.

b) Calculez l'état après U_f, puis enfin calculez l'état juste après les deux dernières portes de Hadamard (c.à.d. juste avant la mesure).

c) On mesure les deux premiers qu-bits dans la base définie par les projecteurs

$$\left\{ |\underline{y}\rangle \langle \underline{y}| \otimes \mathbb{1} \;\middle|\; \underline{y} \in \{00, 01, 10, 11\} \right\}.$$

Le qu-bit de stockage n'est pas mesuré, ce qui est reflété par la matrice $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculez les probabilités d'obtenir les états $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ juste après la mesure.

d) Deduire la probabilité de tomber sur un vecteur de $H^\perp$ et celle de tomber sur un vecteur de H. Pour quelles valeurs de ϕ_0 et ϕ_1 retrouve-t-on les cas où les portes de Hadamard sont parfaites ? Y a-t-il quelquechose d'étonnant dans vos resultats ?

Exercice 3 *Algorithme d'estimation de phase (8 points)*

Soit U un opérateur unitaire qui possède un vecteur propre $|u\rangle$ de valeur propre $\exp(2\pi i\phi)$. C'est à dire

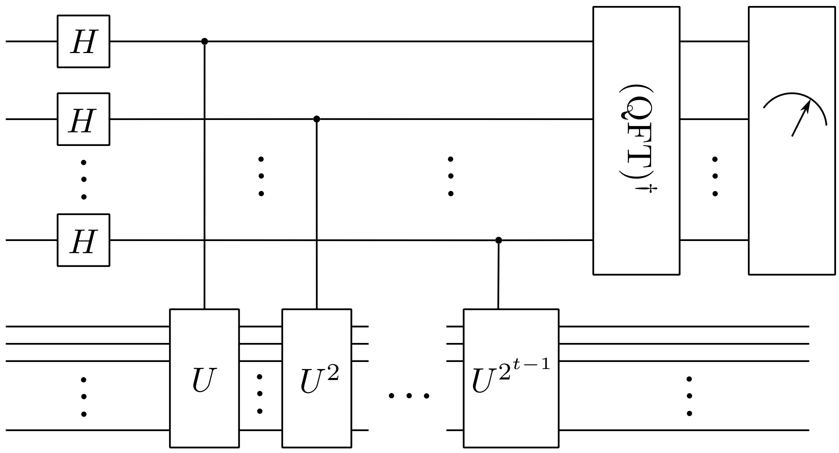
$$U\,|u\rangle = e^{2\pi i\phi}\,|u\rangle\,.$$

On suppose aussi que ϕ est un nombre rationel plus petit que 1, avec exactement t bits. C'est à dire

$$\phi = \frac{\phi_1}{2} + \frac{\phi_2}{2_2} + \cdots + \frac{\phi_t}{2^t}$$

où $\phi_i \in \{0,1\}$ pour $i = 1,\ldots,t$.

Considérez le circuit suivant :



L'état initial est $\Big|\underbrace{0\cdots 0}_{t\ \text{bits}}\Big\rangle \otimes |u\rangle$.

a) Calculez l'état après les portes de Hadamard.

b) Calculez l'état après la première porte contrôle-U, puis après les deux portes contrôle-U^2. Montrez que l'état *juste avant* $(\mathrm{QFT})^\dagger$ est égal à $\mathrm{QFT}\,|2^t\phi\rangle \otimes |u\rangle$.
On rappelle que

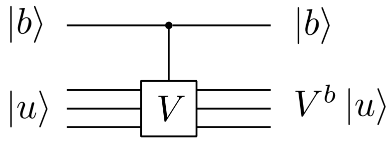
$$\mathrm{QFT}\,|x\rangle = \frac{1}{2^{t/2}} \sum_{y=0}^{2^t-1} e^{\frac{2\pi i}{2^t} x\cdot y}\,|y\rangle$$

où x et y sont des entiers dans $\{0,1,\ldots,2^t-1\}$.

c) Expliquez pourquoi l'état juste avant la mesure est $|2^t\phi\rangle \otimes |u\rangle$.

d) Comment obtient-on la valeur de ϕ ? Le résultat de la mesure est-il aléatoire ?

Indication : La porte contrôle-V agit comme



où b est le bit de contrôle.