Test Intermédiaire – Solutions
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Réalisation d'un état intriqué par RMN (8 points)*

a)

$$R\left(\frac{\pi}{2},\hat{x}\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\sigma_x\right) = \mathbb{1}\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\sigma_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}.$$

$$R\left(\frac{\pi}{2},\hat{y}\right) = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\sigma_y\right) = \mathbb{1}\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\sigma_y = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & +1\\ -1 & 1\end{pmatrix}.$$

Ainsi :

$$R\left(\frac{\pi}{2},\hat{x}\right)|\uparrow\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|\uparrow\rangle + i\,|\downarrow\rangle)$$

$$R\left(\frac{\pi}{2},\hat{y}\right)|\uparrow\rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)$$

où

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, |\downarrow\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

b) La matrice H est <u>diagonale</u>. <u>Dans ce cas</u> l'exponentielle est donné par la matrice diagonale avec les éléments diagonaux exponentiés.

$$\exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right) = \begin{pmatrix}e^{-itJ} & 0 & 0 & 0\\ 0 & e^{itJ} & 0 & 0\\ 0 & 0 & e^{itJ} & 0\\ 0 & 0 & 0 & e^{-itJ}\end{pmatrix}$$

En notation de Dirac :

$$\exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right) = e^{-itJ}\,|\uparrow\uparrow\rangle\langle\uparrow\uparrow| + e^{itJ}\,|\uparrow\downarrow\rangle\langle\uparrow\downarrow| + e^{itJ}\,|\downarrow\uparrow\rangle\langle\downarrow\uparrow| + e^{-itJ}\,|\downarrow\downarrow\rangle\langle\downarrow\downarrow|$$

c) <u>Calcul de la sortie du circuit</u> :

Après les deux premières rotations :

$$R\left(\frac{\pi}{2},\hat{x}\right)\otimes R\left(\frac{\pi}{2},\hat{x}\right)|\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle = \frac{1}{2}(|\uparrow\rangle + i\,|\downarrow\rangle)\otimes(|\uparrow\rangle + i\,|\downarrow\rangle)$$
$$= \frac{1}{2}(|\uparrow\uparrow\rangle + i\,|\uparrow\downarrow\rangle + i\,|\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle).$$

Après la porte $\exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right)$:

$$\exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right)R\left(\frac{\pi}{2},\hat{x}\right)\otimes R\left(\frac{\pi}{2},\hat{x}\right)|\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle$$
$$= \frac{1}{2}(e^{-itJ}\,|\uparrow\uparrow\rangle + ie^{itJ}\,|\uparrow\downarrow\rangle + ie^{itJ}\,|\downarrow\uparrow\rangle - e^{-itJ}\,|\downarrow\downarrow\rangle).$$

En effet $|\uparrow\uparrow\rangle, |\uparrow\downarrow\rangle, |\downarrow\uparrow\rangle, |\downarrow\downarrow\rangle$ sont des vecteurs propres de $\exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right)$ avec valeurs propres $e^{-itJ}, e^{itJ}, e^{itJ}, e^{-itJ}$.

Après la dernière rotation $\mathbb{1}\otimes R\left(\frac{\pi}{2},\hat{y}\right)$:

$$\left(\mathbb{1}\otimes R\left(\frac{\pi}{2},\hat{y}\right)\right)\exp\left(-i\frac{t}{\hbar}H\right)R\left(\frac{\pi}{2},\hat{x}\right)\otimes R\left(\frac{\pi}{2},\hat{x}\right)|\uparrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle$$
$$= \frac{1}{2}e^{-itJ}\,|\uparrow\rangle\otimes\frac{\sqrt{2}}{2}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) + \frac{i}{2}e^{itJ}\,|\uparrow\rangle\otimes\frac{\sqrt{2}}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$
$$+ \frac{i}{2}e^{itJ}\,|\downarrow\rangle\otimes\frac{\sqrt{2}}{2}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) - \frac{1}{2}e^{-itJ}\,|\downarrow\rangle\otimes\frac{\sqrt{2}}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle).$$

Avec $t = \frac{\pi}{4J}$ on trouve finalement :

$$\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}\,|\uparrow\rangle\otimes(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) + \frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\,|\uparrow\rangle\otimes(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$
$$\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\,|\downarrow\rangle\otimes(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) - \frac{\sqrt{2}}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}\,|\downarrow\rangle\otimes(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$
$$= -\frac{\sqrt{2}}{4}e^{-i\frac{\pi}{4}}(2\,|\uparrow\rangle\otimes|\downarrow\rangle + 2\,|\downarrow\rangle\otimes|\uparrow\rangle)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\pi}e^{-i\frac{\pi}{4}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle).$$

Notez que cet état est normalisé à 1 comme il se doit (puisque l'on a agit seulement avec des opérateurs unitaires dessus).

d) Preuve de l'intrication : par l'absurde :

Soit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ t.q.

$$(\alpha\left|\uparrow\right\rangle+\beta\left|\downarrow\right\rangle)\otimes(\gamma\left|\uparrow\right\rangle+\delta\left|\downarrow\right\rangle)=\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\right\rangle.$$

Alors :

$$\alpha\gamma=0,\ \alpha\delta=1,\ \beta\gamma=1,\ \beta\delta=0.$$

$\Longrightarrow$ si $\gamma\neq 0$ alors $\alpha=0$ mais $\alpha\delta=1\Rightarrow$ impossible
si $\alpha\neq 0$ alors $\gamma=0$ mais $\beta\gamma=1\Rightarrow$ impossible
Contradiction.

Exercice 2 *Effet des imperfections sur l'algorithme de Simon (8 points)*

a) L'état juste après les deux premières portes est :

$$\begin{aligned}H_0\otimes H_1\left(|0\rangle\otimes|0\rangle\otimes|0\rangle\right)&=H_0\,|0\rangle\otimes H_1\,|0\rangle\otimes|0\rangle\\&=\frac{1}{2}\big(|0\rangle+(-1)^0e^{i\varphi_0}\,|1\rangle\big)\otimes\big(|0\rangle+(-1)^0e^{i\varphi_1}\,|1\rangle\big)\otimes|0\rangle\\&=\frac{1}{2}\big(|00\rangle+e^{i\varphi_1}\,|01\rangle+e^{i\varphi_0}\,|10\rangle+e^{i\varphi_0+i\varphi_1}\,|11\rangle\big)\otimes|0\rangle\end{aligned}$$

b) Après U_f :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\big\{U_f\left(|00\rangle\otimes|0\rangle\right)+e^{i\varphi_1}U_f\left(|01\rangle\otimes|0\rangle\right)+e^{i\varphi_0}U_f\left(|10\rangle\otimes|0\rangle\right)+e^{i\varphi_0+i\varphi_1}U_f\left(|11\rangle\otimes|0\rangle\right)\big\}\\&\quad=\frac{1}{2}\big\{|00\rangle\otimes|0\rangle+e^{i\varphi_1}\,|01\rangle\otimes|0\rangle+e^{i\varphi_0}\,|10\rangle\otimes|1\rangle+e^{i\varphi_0+i\varphi_1}\,|11\rangle\otimes|0\rangle\big\},\end{aligned}$$

où on a utilisé $f(00)=f(01)=0$ et $f(10)=f(11)=1$.

Enfin appliquons les deux dernières portes de Hadamard $H\otimes H$ aux deux premiers qu-bits :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left(H\otimes H\,|00\rangle\right)\otimes|0\rangle+\frac{1}{2}e^{i\varphi_1}\left(H\otimes H\,|01\rangle\right)\otimes|0\rangle+\\&\qquad+\frac{1}{2}e^{i\varphi_0}\left(H\otimes H\,|10\rangle\right)\otimes|1\rangle+\frac{1}{2}e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}\left(H\otimes H\,|11\rangle\right)\otimes|1\rangle\\&=\frac{1}{4}\left(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle\right)\otimes|0\rangle\\&\quad+\frac{1}{4}e^{i\varphi_1}\left(|00\rangle-|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle\right)\otimes|0\rangle\\&\quad+\frac{1}{4}e^{i\varphi_0}\left(|00\rangle+|01\rangle-|10\rangle-|11\rangle\right)\otimes|1\rangle\\&\quad+\frac{1}{4}e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}\left(|00\rangle-|01\rangle-|10\rangle+|11\rangle\right)\otimes|1\rangle.\end{aligned}$$

L' état juste avant la mesure est :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\big\{\big(1+e^{i\phi_1}\big)|00\rangle+\big(1-e^{i\phi_1}\big)|01\rangle+\big(1+e^{i\phi_1}\big)|10\rangle+\big(1-e^{i\phi_1}\big)|11\rangle\big\}\otimes|0\rangle\\&+\frac{e^{i\varphi_0}}{4}\big\{\big(1+e^{i\phi_1}\big)|00\rangle+\big(1-e^{i\phi_1}\big)|01\rangle+\big(1+e^{i\phi_1}\big)|10\rangle+\big(1-e^{i\phi_1}\big)|11\rangle\big\}\otimes|1\rangle\end{aligned}$$

c) Mesure des deux premiers qu-bits :

$$\begin{aligned}
\text{Prob}\,[00] &= \frac{1}{16}\left|1+e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16}\left|1+e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi_1}{2},\\
\text{Prob}\,[01] &= \frac{1}{16}\left|1-e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16}\left|1-e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_1}{2},\\
\text{Prob}\,[10] &= \frac{1}{16}\left|1+e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16}\left|1+e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi_1}{2},\\
\text{Prob}\,[11] &= \frac{1}{16}\left|1-e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16}\left|1-e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_1}{2}.
\end{aligned}$$

d) Pour toujours trouver un vecteur dans $H^{\perp} = \{(0,0);(1,0)\}$, il est nécessaire et suffisant de prendre $\varphi_1 = 0$ et φ_0 quelconque :

$$\begin{aligned}
&\left\{\begin{array}{l}\text{Prob}\,[00] = \frac{1}{2}\\ \text{Prob}\,[10] = \frac{1}{2}\end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \text{Prob}\,[(0,0) \text{ ou } (1,0)] = 1,\\
&\left\{\begin{array}{l}\text{Prob}\,[01] = 0\\ \text{Prob}\,[11] = 0\end{array}\right. \qquad \Longrightarrow \text{Prob}\,[(0,1) \text{ ou } (1,1)] = 0.
\end{aligned}$$

En général, avec $\varphi_1 \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\text{Prob}\,[00 \text{ ou } 10] &= \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi_1}{2} = \cos^2\frac{\varphi_1}{2},\\
\text{Prob}\,[01 \text{ ou } 11] &= \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_1}{2} = \sin^2\frac{\varphi_1}{2}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 *Algorithme d'estimation de phase (8 points)*

a) Après les portes de Hadamard :

$$H\,|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle + |1\rangle\right)$$

Donc :

$$\underbrace{H \otimes H \otimes \cdots \otimes H}_{t}\underbrace{\left(|0\rangle \otimes \cdots \otimes |0\rangle\right)}_{t} = \frac{1}{2^{\frac{t}{2}}}\sum_{b_1,\ldots,b_t} |b_1,\ldots,b_t\rangle$$

et :

$$H^{\otimes t}\,|0\rangle^{\otimes t} \otimes |u\rangle = \frac{1}{2^{\frac{t}{2}}}\sum_{b_1,\ldots,b_t} |b_1,\ldots,b_t\rangle \otimes |u\rangle$$

b) Après la première porte contrôle-U :

$$\frac{1}{2^{\frac{t}{2}}}\sum_{b_1,\ldots,b_t} |b_1,\ldots,b_t\rangle \otimes e^{2\pi i\phi b_1}\,|u\rangle$$

Après la deuxième porte contrôle-U^2 :

$$\frac{1}{2^{\frac{t}{2}}} \sum_{b_1,\ldots,b_t} |b_1,\ldots,b_t\rangle \otimes e^{2\pi i(\phi b_1+\phi 2b_2)} |u\rangle$$

Finalement juste avant $QFT^\dagger$:

$$\frac{1}{2^{\frac{t}{2}}} \sum_{b_1,\ldots,b_t} |b_1,\ldots,b_t\rangle \otimes e^{2\pi i\phi\left(b_1+2b_2+2^2b_3+\cdots+2^{t-1}b_t\right)} |u\rangle$$

Soit $b = (b_1, \cdots, b_t)$ l'entier d'expansion binaire $b = b_1 + 2b_2 + 2^2b_3 + \cdots + 2^{t-1}b_t$. Remarquez que : $0 \leq b \leq 2^t - 1$.

L'état juste avant $QFT^\dagger$ est :

$$\frac{1}{2^{\frac{t}{2}}} \sum_{b=0}^{2^t-1} e^{\left\{\frac{2\pi i}{2^t}\left(2^t\phi\right)b\right\}} |b\rangle \otimes |u\rangle \equiv QFT \left|2^t\phi\right\rangle \otimes |u\rangle$$

par définition de la QFT ! Notez aussi que $2^t\phi = 2^{t-1}\phi_1 + 2^{t-2}\phi_2 + \cdots + 2\phi_{t-1} + \phi_t$ est un entier.

c) Juste avant la mesure, l'état sera :

$$(QFT)^\dagger\, QFT \left|2^t\phi\right\rangle \otimes |u\rangle = \left|2^t\phi\right\rangle \otimes |u\rangle$$

car QFT est unitaire et donc $\left(QFT^\dagger\right)(QFT) = (QFT)\left(QFT^\dagger\right) = \mathbb{1}$.

d) Pour obtenir ϕ on fait une mesure du premier registre dans la base computationelle. Cela l'état $|2^t\phi\rangle$ avec probabilité 1. $2^t\phi$ est donc un entier connu et on divise par 2^t pour obtenir ϕ.