ENTRAINEMENT 2014 (chimer).

Série 5
Traitement quantique de l'information II

Exercice 1 *Variation sur le problème de Simon*

Un qu-trit est un système quantique à 3 niveaux d'énergie. Les 3 états de base correspondants sont notés $|0\rangle$, $|1\rangle$ et $|2\rangle$. Un état général appartient à l'espace d'Hilbert $\mathbb{C}^3$,

$$|\psi\rangle = \alpha\,|0\rangle + \beta\,|1\rangle + \gamma\,|2\rangle$$

avec $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ et $|\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$. Soit $\mathbb{F}_3^n$ l'espace vectoriel des vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ à n composantes avec chaque composante prise mod 3. Le corps de l'espace vectoriel est $\mathbb{F}_3$ (entiers avec + et $\times$ mod 3). Soit H le sous-espace vectoriel

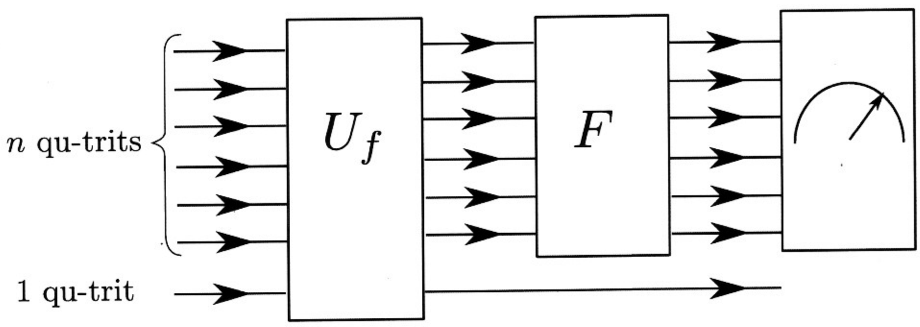
$$H = \left\{\vec{x} \in \mathbb{F}_3^n \middle|\, \vec{x} = (0, \vec{x}') \text{ avec } \vec{x}' \in \mathbb{F}_3^{n-1}\right\}.$$

On se donne une fonction telle que

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{F}_3^n \to \{0, 1, 2\} \\ &\vec{x} \longmapsto f(\vec{x}) \end{aligned}$$

avec $f(\vec{x}) = f(\vec{y})$ si et seulement si $\vec{x} - \vec{y} \in H$.

On considère le circuit quantique suivant :



- L'état d'entrée est initialisé à :

$$|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x} \in \mathbb{F}_3^n} |\vec{x}\rangle \otimes |0\rangle$$

- La porte U_f (unitaire) est définie par

$$U_f\,|\vec{x}\rangle \otimes |y\rangle = |\vec{x}\rangle \otimes |y + f(\vec{x})\rangle \text{ avec } y = 0, 1, 2$$

Ici $y + f(\vec{x})$ est calculé mod 3.

– La porte F est une version de la transformée de Fourier quantique

$$F\left|\vec{x}\right\rangle = \frac{1}{3^{n/2}}\sum_{\vec{y}\in\mathbb{F}_3^n}\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}\cdot\vec{y}\right)\left|\vec{y}\right\rangle$$

où $\vec{x}\cdot\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \mod 3$.

a) Montrez que H est un sous-groupe de $\mathbb{F}_3^n$ pour l'addition $\mathrm{mod}\,3$. Donnez sa cardinalité. Montrez qu'il y a 3 classes d'équivalence de H dans $\mathbb{F}_3^n$ et donnez leur cardinalité.

b) Soit $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ des représentants des 3 classes d'équivalence avec $f(\vec{a}) = 0$, $f(\vec{b}) = 1$, $f(\vec{c}) = 2$. Montrez que l'état juste après la porte U_f est

$$U_f\left|\psi_{in}\right\rangle = \frac{1}{3^{n/2}}\sum_{\vec{x}\in H}\left\{\left|\vec{a}+\vec{x}\right\rangle\otimes\left|0\right\rangle + \left|\vec{b}+\vec{x}\right\rangle\otimes\left|1\right\rangle + \left|\vec{c}+\vec{x}\right\rangle\otimes\left|2\right\rangle\right\}$$

c) Montrez que l'état juste après la porte F peut s'écrire :

$$(F\otimes\mathbb{I})\,U_f\left|\psi_{in}\right\rangle = \frac{1}{3}\sum_{y_1=0,1,2}\left|y_1,0,...,0\right\rangle\otimes\left\{e^{\frac{2\pi i}{3}y_1 a_1}\left|0\right\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}y_1 b_1}\left|1\right\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}y_1 c_1}\left|2\right\rangle\right\}$$

Indication : utilisez la formule

$$\sum_{\vec{x}\in H}\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}\cdot\vec{y}\right) = \begin{cases} 3^{n-1} & \text{si } \vec{y}\in H^{\perp} \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

Facultatif : prouvez cette formule.

d) Appliquez le postulat de la mesure sur les n premiers qu-trits et montrez que

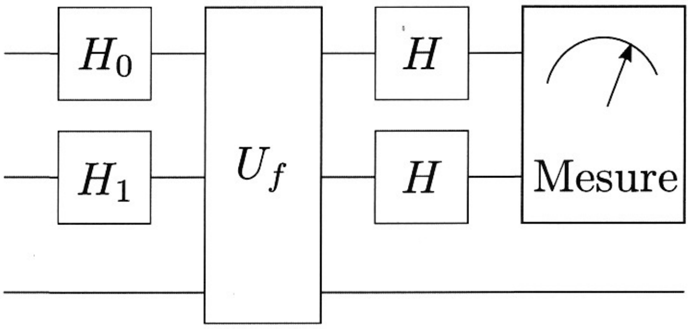
$$\Pr(\vec{y}) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } \vec{y} = (y_1, 0, ..., 0) \text{ avec } y_1 = 0,1,2 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

e) En admettant que H est un sous-groupe caché de dimension connue $n-1$, combien de mesures faut-il faire pour reconstruire H avec une probabilité de succès égale à $1-\varepsilon$ (ε très petit) ?

Exercice 2 *Effet des imperfections sur l'algorithme de Simon*

On considère le problème de Simon pour $n = 2$. Soit $H = \{\underline{x} \in \mathbb{F}_2^2 \mid \underline{x} = (0, x_2), \text{avec } x_2 \in \{0,1\}\}$. C'est le "sous-espace vectoriel caché" de $\mathbb{F}_2^2$. Soit $f : \mathbb{F}_2^2 \longrightarrow \{0,1\}$ telle que $f(\underline{x}) = f(\underline{y})$ si et seulement si $\underline{x} - \underline{y} \in H$. Pour fixer les idées on prendra la fonction $f(0,0) = f(0,1) = 0$ et $f(1,0) = f(1,1) = 1$.

Considérez le circuit (de l'algorithme de Simon) :



où H_0 et H_1 sont des portes de Hadamard *imparfaites* :

$$H_0 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + (-1)^b e^{i\phi_0} |1\rangle\right)$$
$$H_1 |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + (-1)^b e^{i\phi_1} |1\rangle\right)$$

et ϕ_0 et ϕ_1 sont des phases dans $[0, 2\pi]$. Les deux dernières portes du circuit sont des portes de Hadamard standard

$$H |b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|0\rangle + (-1)^b |1\rangle\right)$$

et $U_f |x_1, x_2\rangle \otimes |z\rangle = |x_1, x_2\rangle \otimes |z \oplus f(x_1, x_2)\rangle$. Le circuit est initialisé à $|0,0\rangle \otimes |0\rangle$.

a) Calculez l'état juste après les deux premières portes de H_0 et H_1.

b) Calculez l'état après U_f, puis enfin calculez l'état juste après les deux dernières portes de Hadamard (c.à.d. juste avant la mesure).

c) On mesure les deux premiers qu-bits dans la base définie par les projecteurs

$$\left\{ |\underline{y}\rangle \langle \underline{y}| \otimes \mathbb{1} \;\middle|\; \underline{y} \in \{00, 01, 10, 11\} \right\}.$$

Le qu-bit de stockage n'est pas mesuré, ce qui est reflété par la matrice $\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculez les probabilités d'obtenir les états $|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle$ juste après la mesure.

d) Deduire la probabilité de tomber sur un vecteur de $H^{\perp}$ et celle de tomber sur un vecteur de H. Pour quelles valeurs de ϕ_0 et ϕ_1 retrouve-t-on les cas où les portes de Hadamard sont parfaites ? Y a-t-il quelquechose d'étonnant dans vos resultats ?

Exercice 3 *Algorithme d'estimation de phase (8 points)*

Soit U un opérateur unitaire qui possède un vecteur propre $|u\rangle$ de valeur propre $\exp(2\pi i\phi)$. C'est à dire

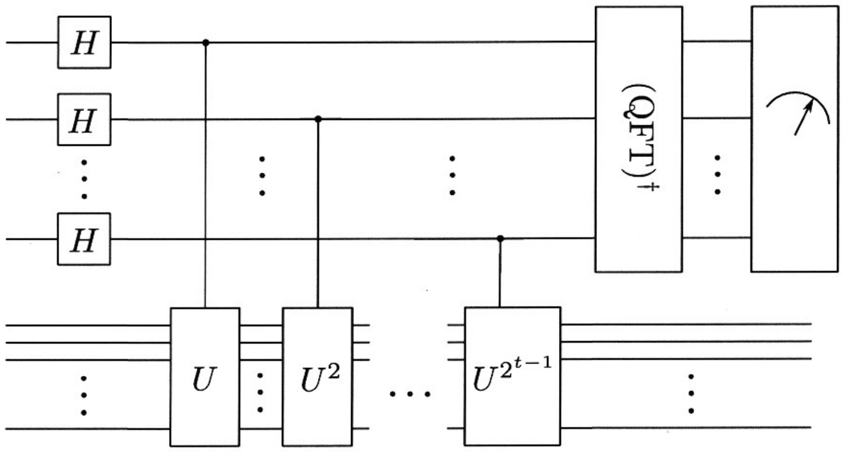
$$U|u\rangle = e^{2\pi i\phi}|u\rangle\,.$$

On suppose aussi que ϕ est un nombre rationel plus petit que 1, avec exactement t bits. C'est à dire

$$\phi = \frac{\phi_1}{2} + \frac{\phi_2}{2_2} + \cdots + \frac{\phi_t}{2^t}$$

où $\phi_i \in \{0, 1\}$ pour $i = 1, \ldots, t$.

Considérez le circuit suivant :



L'état initial est $\Big|\underbrace{0\cdots0}_{t\text{ bits}}\Big\rangle \otimes |u\rangle$.

a) Calculez l'état après les portes de Hadamard.

b) Calculez l'état après la première porte contrôle-U, puis après les deux portes contrôle-U^2. Montrez que l'état *juste avant* $(\mathrm{QFT})^\dagger$ est égal à $\mathrm{QFT}\,|2^t\phi\rangle \otimes |u\rangle$.
   On rappelle que

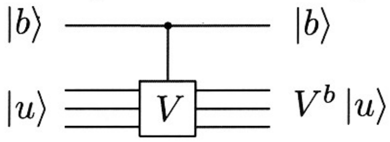
$$\mathrm{QFT}\,|x\rangle = \frac{1}{2^{t/2}} \sum_{y=0}^{2^t-1} e^{\frac{2\pi i}{2^t} x\cdot y}\,|y\rangle$$

   où x et y sont des entiers dans $\{0, 1, \ldots, 2^t - 1\}$.

c) Expliquez pourquoi l'état juste avant la mesure est $|2^t\phi\rangle \otimes |u\rangle$.

d) Comment obtient-on la valeur de ϕ ? Le résultat de la mesure est-il aléatoire ?

Indication : La porte contrôle-V agit comme



où b est le bit de contrôle.

Traitement quantique de l'information II EPFL Semestre de printemps 2012
Dr. Nicolas Macris 25 Mai 2012

Série 11
Traitement quantique de l'information II

Exercice ~~1~~ 4

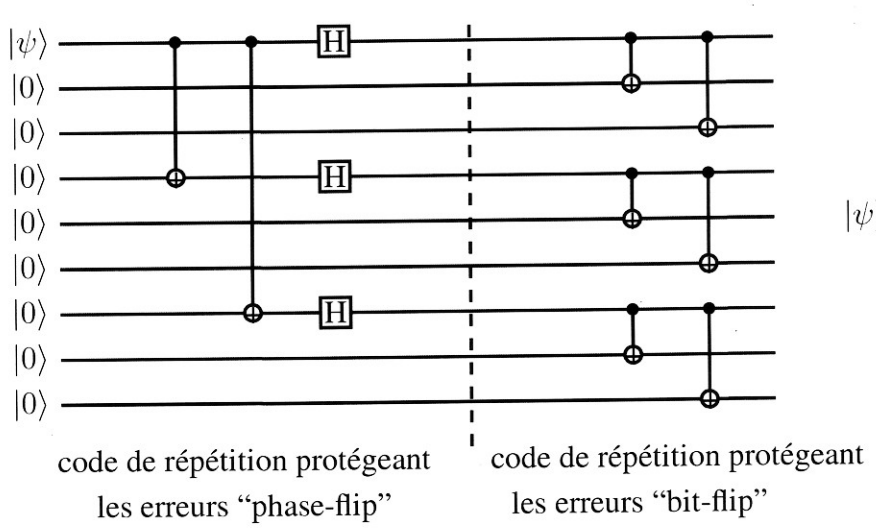
Le "code de Shor" utilise 9 qubits pour encoder un qubit d'information et corrige une erreur. Sa longueur est 9, dimension (comme sous-espace de Hilbert) est 2. Les mots sont de la forme $\alpha|0\rangle_S + \beta|1\rangle_S$ avec

$$\frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|000\rangle + |111\rangle}{\sqrt{2}} \equiv |0\rangle_S.$$

$$\frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|000\rangle - |111\rangle}{\sqrt{2}} \equiv |1\rangle_S.$$

a) Vérifiez que le circuit suivant réalise cet encodage de facon unitaire :

$\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle =$



$|\psi\rangle_S = \alpha|0\rangle_S + \beta|1\rangle_S$

~~Exercice 2~~

~~Le code de Steane est un code CSS(C_1, C_2) avec C_1 = Hamming (7, 4) et $C_2 = C_1^\perp$.~~

Indication : Calculez[1] la sortie pour $\alpha = 1$ et $\beta = 0$ puis $\alpha = 0$ et $\beta = 1$.
Ensuite invoquez la linéarité.

a) Donnez les matrices de parité de C_1 et generatrices de C_2. En deduire que $C_2 \subset C_1$. Combien d'erreurs sont corrigees par C_1 et $C_2^{\perp}$?

b) Quels sont les paramètres du code de Steane (longueur, dimension, nombre d'erreurs corrigees) ?

c) Construisez les mots de codes de CSS(C_1, C_2). Indication : vous devriez trouver que les mots sont l'ensemble des états $\alpha|0\rangle_{\text{Steane}} + \beta|1\rangle_{\text{Steane}}$ avec

$$|0\rangle_{\text{Steane}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\{|0000000\rangle + |1001101\rangle + |0101011\rangle + |0010111\rangle + |0111100\rangle + |1011010\rangle + |1100110\rangle + |1110001\rangle\}$$

et

$$|1\rangle_{\text{Steane}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\{|1111111\rangle + |0110010\rangle + |1010100\rangle + |1101000\rangle + |1000011\rangle + |0100101\rangle + |0011001\rangle + |0001110\rangle\}.$$

~~Série 8~~
~~Traitement quantique de l'information II~~

Exercice 5 .

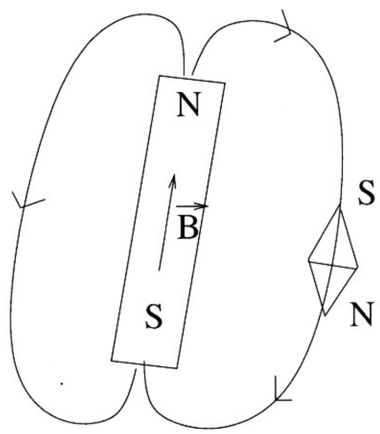
Hamiltonien de Heisenberg

Rappel

Nous avons vu que l'énergie d'interaction d'un moment magnétique $\vec{M}$ avec un champ magnétique $\vec{B}$ est donnée par

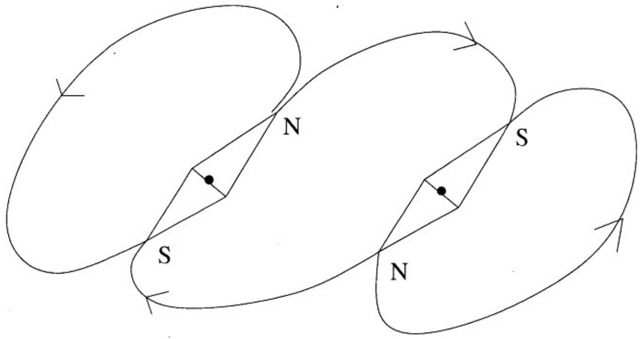
$$H = -\vec{B} \cdot \vec{M}$$

La différence entre cette quantité et son minimum est l'énergie qu'il faut fournir pour faire dévier la boussole de son état d'équilibre (voir figure).



Interaction entre deux moments magnétiques

Prenons maintenant deux moments magnétiques et supposons pour le moment qu'il n'y a aucun champ magnétique externe. Leur énergie d'interaction est proportionnelle à $\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2$. Le minimum est atteint pour la configuration d'équilibre de la figure qui correspond à prendre $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ opposés. Notez que $\vec{M}_1 \cdot \vec{M}_2$ est la fonction la plus simple des deux vecteurs $\vec{M}_1$ et $\vec{M}_2$ qui soit invariante sous les rotations.



En M.Q. pour deux spins 1/2 on a $\vec{M}_1 = g_1 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_1$ et $\vec{M}_2 = g_2 \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}_2$. On posera donc pour l'hamiltonien d'interaction

$$H = \hbar J \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2$$

C'est l'hamiltonien de Heisenberg, L'espace de Hilbert des deux spins (ou deux q-bits!) est $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ et la formule ci-dessus signifie en fait

$$H = \hbar J \left(\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z \right)$$

L'hamiltonien de Heisenberg est donc une matrice 4×4.

1. Écrire la matrice 4×4 explicitement.
2. Montrez que
$$H = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + 2\hbar J \left(\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^+ \right)$$
3. Poser $|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et vérifiez les relations
$$\begin{array}{ll} \sigma_z \left|\uparrow\right\rangle = \left|\uparrow\right\rangle & \sigma_z \left|\downarrow\right\rangle = -\left|\downarrow\right\rangle \\ \sigma_+ \left|\uparrow\right\rangle = 0 & \sigma_+ \left|\downarrow\right\rangle = \left|\uparrow\right\rangle \\ \sigma_- \left|\uparrow\right\rangle = \left|\downarrow\right\rangle & \sigma_- \left|\downarrow\right\rangle = 0 \end{array}$$
Pour cette raison on appelle souvent σ_+ et σ_- les "raising and lowering operators".
4. Analysez l'action de H sur l'état dit "singulet"
$$|\psi_{0,0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle \right)$$
et sur les états "triplets"
$$\begin{aligned} |\psi_{1,1}\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle \\ |\psi_{1,0}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle \right) \\ |\psi_{1,-1}\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle \end{aligned}$$
En déduire les niveaux d'énergie de H et les placer sur un axe (vertical).
5. On ajoute maintenant un champ magnétique extérieur $\vec{B} = (0, 0, B)$. L'hamiltonien total est maintenant
$$H = -\gamma_1 \vec{B} \cdot \vec{\sigma}_1 - \gamma_2 \vec{B} \cdot \vec{\sigma}_2 + \hbar J \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$$
On posera $\gamma_1 B = \hbar\omega_1$ et $\gamma_2 B = \hbar\omega_2$. Ecrire la matrice 4×4 explicitement. On regarde maintenant le cas $\omega_1 = \omega_2 = \omega_0/2$ (ou $\gamma_1 = \gamma_2$). En utilisant directement d) donnez les valeurs et vecteurs propres et faîtes un graphe des niveaux d'énergie en fonction de B.

Solutions Série 5
Traitement quantique de l'information II

Solution

Exercice 1 *Variation sur le problème de Simon*

a) On a $(0,\vec{x}') + (0,\vec{x}'') = (0,\vec{x}' + \vec{x}'') \in H$ et $(0,0,...,0) \in H$. Les deux propriétés entrainent que H est un sous-groupe de $\mathbb{F}_3^n$. La cordinalité est $|H| = 3^{n-1}$. D'après le théorème de Lagrange il y a $|\mathbb{F}_3^n/H| = \frac{|\mathbb{F}_3^n|}{|H|} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3$ classes d'équivalence.

b)

$$U_f\,|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x}\in\mathbb{F}_3^n} |\vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{x})\rangle.$$

Puisque f est constante sur les classes d'équivalence on peut écrire

$$\mathbb{F}_3^n = \{\vec{a}+\vec{x}, \vec{x}\in H\} U \{\vec{b}+\vec{x}, \vec{x}\in H\} U \{\vec{c}+\vec{x}, \vec{x}\in H\}$$

$$\begin{aligned} U_f\,|\psi_{in}\rangle &= \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x}\in H} \{|\vec{a}+\vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{a})\rangle + |\vec{b}+\vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{b})\rangle + |\vec{c}+\vec{x}\rangle \otimes |f(\vec{c})\rangle\} \\ &= \frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x}\in H} \{|\vec{a}+\vec{x}\rangle \otimes |0\rangle + |\vec{b}+\vec{x}\rangle \otimes |1\rangle + |\vec{c}+\vec{x}\rangle \otimes |2\rangle\} \end{aligned}$$

c) On a :

$$\begin{aligned} (F\otimes\mathbb{I})\,U_f\,|\psi_{in}\rangle = \frac{1}{3^{n/2}}\frac{1}{3^{n/2}} \sum_{\vec{x}\in H}\sum_{\vec{y}\in\mathbb{F}_3^n} & e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{a}+\vec{x})\vec{y}}|\vec{y}\rangle \otimes |0\rangle \\ & + e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{b}+\vec{x})\vec{y}}|\vec{y}\rangle \otimes |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}(\vec{c}+\vec{x})\vec{y}}|\vec{y}\rangle \otimes |2\rangle \end{aligned}$$

Grâce à l'indication :

$$\begin{aligned} (F\otimes\mathbb{I})\,U_f\,|\psi_{in}\rangle &= \frac{1}{3}\sum_{\vec{y}\in H^\perp} e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|\vec{y}\rangle \otimes |0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|\vec{y}\rangle \otimes |1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|\vec{y}\rangle \otimes |2\rangle \\ &= \frac{1}{3}\sum_{\vec{y}\in H^\perp} |\vec{y}\rangle \otimes \left\{e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|2\rangle\right\} \\ &= \frac{1}{3}\sum_{y_1=0,1,2} |y_1,0,...,0\rangle \otimes \left\{e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|2\rangle\right\} \\ &\equiv |\psi_{fin}\rangle \end{aligned}$$

d) D'après le postulat de la mesure, après la mesure l'état devient (0 si $\vec{y} \neq (y_1, 0, ..., 0)$)
$(\mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I})|\psi_{fin}\rangle = \frac{1}{3}|y_1, 0, ..., 0\rangle \otimes \left\{e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|2\rangle\right\}$
et donc :

$$\begin{aligned}\langle\psi_{fin}|\, \mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I}|\psi_{fin}\rangle &= \langle\psi_{fin}|(\mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I})(\mathrm{P}_{\vec{y}} \otimes \mathbb{I})|\psi_{fin}\rangle \\ &= \frac{1}{9}\left\{e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|2\rangle\right\}^* \left\{e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{a}\vec{y}}|0\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{b}\vec{y}}|1\rangle + e^{\frac{2\pi i}{3}\vec{c}\vec{y}}|2\rangle\right\} \\ &= \frac{1}{9} \cdot 3 = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

e) Quand on fait une mesure on obtient
$(0, 0, ..., 0)$ ou $(1, 0, ..., 0)$ ou $(2, 0, ..., 0)$
avec probabilité $1/3$. Si on obtient $(1, 0, ..., 0)$ ou $(2, 0, ..., 0)$ on connait $H^\perp$ (puisque l'on sait que sa dimension est 1). Une fois $H^\perp$ connu on connait H. La probabilité d'échec lors d'une mesure est donc $1/3$ (événement $(0, 0, ..., 0)$).

$$\text{Prob(succès avec T mesures)} = 1 - \text{Prob(échec T fois)} = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^T = 1 - \epsilon.$$

$\Rightarrow \quad \epsilon = \left(\frac{1}{3}\right)^T \quad \Rightarrow \quad T = \frac{|\ln \epsilon|}{\ln 3}.$

f) *Preuve de l'indication* :
– Si $\vec{y} \in H^\perp = \{\vec{y} \mid \vec{y} \cdot \vec{x} = 0 \ \forall \vec{x} \in H\}$ on a bien sûr

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right) = \sum_{\vec{x} \in H} 1 = |H| = 3^{n-1}.$$

– Si $\vec{y} \notin H^\perp$ alors $\exists \vec{x}_0 \in H$ t.q. $\vec{y} \cdot \vec{x}_0 \neq 0$ c.à.d $= j \bmod 3$, $j = 1$ ou 2.

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right) = \left(\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right)\right) \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right),$$

car H est un groupe et donc invariant par $\vec{x} \to \vec{x} + \vec{x}_0$

$$\Rightarrow \left(\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right)\right)\left(1 - \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right)\right) = 0$$

Puisque $\exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x}_0 \cdot \vec{y}\right)$ est $e^{\frac{2\pi i}{2}} \neq 1$ ou $e^{\frac{4\pi i}{2}} \neq 1$,

$$\sum_{\vec{x} \in H} \exp\left(\frac{2\pi i}{3}\vec{x} \cdot \vec{y}\right) = 0.$$

Solution **Exercice 2** *Effet des imperfections sur l'algorithme de Simon*

a) L'état juste après les deux premières portes est :

$$\begin{aligned}
H_0 \otimes H_1 (|0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle) &= H_0 |0\rangle \otimes H_1 |0\rangle \otimes |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \big(|0\rangle + (-1)^0 e^{i\varphi_0} |1\rangle\big) \otimes \big(|0\rangle + (-1)^0 e^{i\varphi_1} |1\rangle\big) \otimes |0\rangle \\
&= \frac{1}{2} \big(|00\rangle + e^{i\varphi_1} |01\rangle + e^{i\varphi_0} |10\rangle + e^{i\varphi_0 + i\varphi_1} |11\rangle\big) \otimes |0\rangle
\end{aligned}$$

b) Après U_f :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \left\{U_f (|00\rangle \otimes |0\rangle) + e^{i\varphi_1} U_f (|01\rangle \otimes |0\rangle) + e^{i\varphi_0} U_f (|10\rangle \otimes |0\rangle) + e^{i\varphi_0 + i\varphi_1} U_f (|11\rangle \otimes |0\rangle)\right\} \\
&\quad = \frac{1}{2} \left\{|00\rangle \otimes |0\rangle + e^{i\varphi_1} |01\rangle \otimes |0\rangle + e^{i\varphi_0} |10\rangle \otimes |1\rangle + e^{i\varphi_0 + i\varphi_1} |11\rangle \otimes |0\rangle\right\},
\end{aligned}$$

où on a utilisé $f(00) = f(01) = 0$ et $f(10) = f(11) = 1$.

Enfin appliquons les deux dernières portes de Hadamard $H \otimes H$ aux deux premiers qu-bits :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} (H \otimes H |00\rangle) \otimes |0\rangle + \frac{1}{2} e^{i\varphi_1} (H \otimes H |01\rangle) \otimes |0\rangle + \\
&\qquad + \frac{1}{2} e^{i\varphi_0} (H \otimes H |10\rangle) \otimes |1\rangle + \frac{1}{2} e^{i(\varphi_0 + \varphi_1)} (H \otimes H |11\rangle) \otimes |1\rangle \\
&= \frac{1}{4} (|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle + |11\rangle) \otimes |0\rangle \\
&\quad + \frac{1}{4} e^{i\varphi_1} (|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \otimes |0\rangle \\
&\quad + \frac{1}{4} e^{i\varphi_0} (|00\rangle + |01\rangle - |10\rangle - |11\rangle) \otimes |1\rangle \\
&\quad + \frac{1}{4} e^{i(\varphi_0 + \varphi_1)} (|00\rangle - |01\rangle - |10\rangle + |11\rangle) \otimes |1\rangle .
\end{aligned}$$

L' état juste avant la mesure est :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{4} \left\{\left(1 + e^{i\phi_1}\right) |00\rangle + \left(1 - e^{i\phi_1}\right) |01\rangle + \left(1 + e^{i\phi_1}\right) |10\rangle + \left(1 - e^{i\phi_1}\right) |11\rangle\right\} \otimes |0\rangle \\
&+ \frac{e^{i\varphi_0}}{4} \left\{\left(1 + e^{i\phi_1}\right) |00\rangle + \left(1 - e^{i\phi_1}\right) |01\rangle + \left(1 + e^{i\phi_1}\right) |10\rangle + \left(1 - e^{i\phi_1}\right) |11\rangle\right\} \otimes |1\rangle
\end{aligned}$$

c) Mesure des deux premiers qu-bits :

$$\begin{aligned}
\text{Prob}\,[00] &= \frac{1}{16} \left|1 + e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16} \left|1 + e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_1}{2}, \\
\text{Prob}\,[01] &= \frac{1}{16} \left|1 - e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16} \left|1 - e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}, \\
\text{Prob}\,[10] &= \frac{1}{16} \left|1 + e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16} \left|1 + e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2} \cos^2 \frac{\varphi_1}{2}, \\
\text{Prob}\,[11] &= \frac{1}{16} \left|1 - e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16} \left|1 - e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_1}{2}.
\end{aligned}$$

d) Pour toujours trouver un vecteur dans $H^{\perp} = \{(0,0); (1,0)\}$, il est nécessaire et suffisant de prendre $\varphi_1 = 0$ et φ_0 quelconque :

$$\begin{cases} \text{Prob}\,[00] = \frac{1}{2} \\ \text{Prob}\,[10] = \frac{1}{2} \end{cases} \Longrightarrow \text{Prob}\,[(0,0) \text{ ou } (1,0)] = 1,$$
$$\begin{cases} \text{Prob}\,[01] = 0 \\ \text{Prob}\,[11] = 0 \end{cases} \Longrightarrow \text{Prob}\,[(0,1) \text{ ou } (1,1)] = 0.$$

En général, avec $\varphi_1 \neq 0$, on a

$$\text{Prob}\,[00 \text{ ou } 10] = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi_1}{2} = \cos^2\frac{\varphi_1}{2},$$
$$\text{Prob}\,[01 \text{ ou } 11] = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_1}{2} = \sin^2\frac{\varphi_1}{2}.$$

$$(\alpha\left|\uparrow\right\rangle+\beta\left|\downarrow\right\rangle)\otimes(\gamma\left|\uparrow\right\rangle+\delta\left|\downarrow\right\rangle)=\left|\uparrow\downarrow\right\rangle+\left|\downarrow\uparrow\right\rangle.$$

Alors :

$$\alpha\gamma=0,\ \alpha\delta=1,\ \beta\gamma=1,\ \beta\delta=0.$$

$\Longrightarrow$ si $\gamma\neq 0$ alors $\alpha=0$ mais $\alpha\delta=1\Rightarrow$ <u>impossible</u>
si $\alpha\neq 0$ alors $\gamma=0$ mais $\beta\gamma=1\Rightarrow$ <u>impossible</u>
Contradiction.

Exercice 2 *Effet des imperfections sur l'algorithme de Simon (8 points)*

a) L'état juste après les deux premières portes est :

$$\begin{aligned}H_0\otimes H_1(|0\rangle\otimes|0\rangle\otimes|0\rangle)&=H_0|0\rangle\otimes H_1|0\rangle\otimes|0\rangle\\&=\frac{1}{2}\big(|0\rangle+(-1)^0e^{i\varphi_0}|1\rangle\big)\otimes\big(|0\rangle+(-1)^0e^{i\varphi_1}|1\rangle\big)\otimes|0\rangle\\&=\frac{1}{2}\big(|00\rangle+e^{i\varphi_1}|01\rangle+e^{i\varphi_0}|10\rangle+e^{i\varphi_0+i\varphi_1}|11\rangle\big)\otimes|0\rangle\end{aligned}$$

b) Après U_f :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left\{U_f(|00\rangle\otimes|0\rangle)+e^{i\varphi_1}U_f(|01\rangle\otimes|0\rangle)+e^{i\varphi_0}U_f(|10\rangle\otimes|0\rangle)+e^{i\varphi_0+i\varphi_1}U_f(|11\rangle\otimes|0\rangle)\right\}\\&\quad=\frac{1}{2}\left\{|00\rangle\otimes|0\rangle+e^{i\varphi_1}|01\rangle\otimes|0\rangle+e^{i\varphi_0}|10\rangle\otimes|1\rangle+e^{i\varphi_0+i\varphi_1}|11\rangle\otimes|0\rangle\right\},\end{aligned}$$

où on a utilisé $f(00)=f(01)=0$ et $f(10)=f(11)=1$.

Enfin appliquons les deux dernières portes de Hadamard $H\otimes H$ aux deux premiers qu-bits :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}(H\otimes H|00\rangle)\otimes|0\rangle+\frac{1}{2}e^{i\varphi_1}(H\otimes H|01\rangle)\otimes|0\rangle+\\&\qquad+\frac{1}{2}e^{i\varphi_0}(H\otimes H|10\rangle)\otimes|1\rangle+\frac{1}{2}e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}(H\otimes H|11\rangle)\otimes|1\rangle\\&=\frac{1}{4}(|00\rangle+|01\rangle+|10\rangle+|11\rangle)\otimes|0\rangle\\&\quad+\frac{1}{4}e^{i\varphi_1}(|00\rangle-|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle)\otimes|0\rangle\\&\quad+\frac{1}{4}e^{i\varphi_0}(|00\rangle+|01\rangle-|10\rangle-|11\rangle)\otimes|1\rangle\\&\quad+\frac{1}{4}e^{i(\varphi_0+\varphi_1)}(|00\rangle-|01\rangle-|10\rangle+|11\rangle)\otimes|1\rangle.\end{aligned}$$

L' état juste avant la mesure est :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{4}\left\{\left(1+e^{i\phi_1}\right)|00\rangle+\left(1-e^{i\phi_1}\right)|01\rangle+\left(1+e^{i\phi_1}\right)|10\rangle+\left(1-e^{i\phi_1}\right)|11\rangle\right\}\otimes|0\rangle\\&+\frac{e^{i\varphi_0}}{4}\left\{\left(1+e^{i\phi_1}\right)|00\rangle+\left(1-e^{i\phi_1}\right)|01\rangle+\left(1+e^{i\phi_1}\right)|10\rangle+\left(1-e^{i\phi_1}\right)|11\rangle\right\}\otimes|1\rangle\end{aligned}$$

c) Mesure des deux premiers qu-bits :

$$\begin{aligned}
\text{Prob}\,[00] &= \frac{1}{16}\left|1+e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16}\left|1+e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi_1}{2},\\
\text{Prob}\,[01] &= \frac{1}{16}\left|1-e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16}\left|1-e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_1}{2},\\
\text{Prob}\,[10] &= \frac{1}{16}\left|1+e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16}\left|1+e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi_1}{2},\\
\text{Prob}\,[11] &= \frac{1}{16}\left|1-e^{i\varphi_1}\right|^2 + \frac{1}{16}\left|1-e^{i\varphi_1}\right|^2 = \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_1}{2}.
\end{aligned}$$

d) Pour toujours trouver un vecteur dans $H^{\perp} = \{(0,0);(1,0)\}$, il est nécessaire et suffisant de prendre $\varphi_1 = 0$ et φ_0 quelconque :

$$\begin{cases}\text{Prob}\,[00] = \frac{1}{2}\\ \text{Prob}\,[10] = \frac{1}{2}\end{cases} \Longrightarrow \text{Prob}\,[(0,0) \text{ ou } (1,0)] = 1,$$

$$\begin{cases}\text{Prob}\,[01] = 0\\ \text{Prob}\,[11] = 0\end{cases} \Longrightarrow \text{Prob}\,[(0,1) \text{ ou } (1,1)] = 0.$$

En général, avec $\varphi_1 \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\text{Prob}\,[00 \text{ ou } 10] &= \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2\frac{\varphi_1}{2} = \cos^2\frac{\varphi_1}{2},\\
\text{Prob}\,[01 \text{ ou } 11] &= \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_1}{2} + \frac{1}{2}\sin^2\frac{\varphi_1}{2} = \sin^2\frac{\varphi_1}{2}.
\end{aligned}$$

Solution **Exercice 3** *Algorithme d'estimation de phase (~~8 points~~)*

a) Après les portes de Hadamard :

$$H\left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|0\right\rangle + \left|1\right\rangle\right)$$

Donc :

$$\underbrace{H\otimes H\otimes\cdots\otimes H}_{t}\underbrace{\left(\left|0\right\rangle\otimes\cdots\otimes\left|0\right\rangle\right)}_{t} = \frac{1}{2^{\frac{t}{2}}}\sum_{b_1,\ldots,b_t}\left|b_1,\ldots,b_t\right\rangle$$

et :

$$H^{\otimes t}\left|0\right\rangle^{\otimes t}\otimes\left|u\right\rangle = \frac{1}{2^{\frac{t}{2}}}\sum_{b_1,\ldots,b_t}\left|b_1,\ldots,b_t\right\rangle\otimes\left|u\right\rangle$$

b) Après la première porte contrôle-U :

$$\frac{1}{2^{\frac{t}{2}}}\sum_{b_1,\ldots,b_t}\left|b_1,\ldots,b_t\right\rangle\otimes e^{2\pi i\phi b_1}\left|u\right\rangle$$

Après la deuxième porte contrôle-U^2 :

$$\frac{1}{2^{\frac{t}{2}}} \sum_{b_1,\ldots,b_t} |b_1, \ldots, b_t\rangle \otimes e^{2\pi i(\phi b_1 + \phi 2 b_2)} |u\rangle$$

Finalement juste avant $QFT^\dagger$:

$$\frac{1}{2^{\frac{t}{2}}} \sum_{b_1,\ldots,b_t} |b_1, \ldots, b_t\rangle \otimes e^{2\pi i \phi \left(b_1 + 2b_2 + 2^2 b_3 + \cdots + 2^{t-1} b_t\right)} |u\rangle$$

Soit $b = (b_1, \cdots, b_t)$ l'entier d'expansion binaire $b = b_1 + 2b_2 + 2^2 b_3 + \cdots + 2^{t-1} b_t$. Remarquez que : $0 \leq b \leq 2^t - 1$.

L'état juste avant $QFT^\dagger$ est :

$$\frac{1}{2^{\frac{t}{2}}} \sum_{b=0}^{2^t-1} e^{\left\{\frac{2\pi i}{2^t}(2^t \phi) b\right\}} |b\rangle \otimes |u\rangle \equiv QFT \left|2^t \phi\right\rangle \otimes |u\rangle$$

par définition de la QFT ! Notez aussi que $2^t \phi = 2^{t-1} \phi_1 + 2^{t-2} \phi_2 + \cdots + 2\phi_{t-1} + \phi_t$ est un entier.

c) Juste avant la mesure, l'état sera :

$$(QFT)^\dagger \, QFT \left|2^t \phi\right\rangle \otimes |u\rangle = \left|2^t \phi\right\rangle \otimes |u\rangle$$

car QFT est unitaire et donc $\left(QFT^\dagger\right)(QFT) = (QFT)\left(QFT^\dagger\right) = \mathbb{1}$.

d) Pour obtenir ϕ on fait une mesure du premier registre dans la base computationelle. Cela l'état $|2^t \phi\rangle$ avec probabilité 1. $2^t \phi$ est donc un entier connu et on divise par 2^t pour obtenir ϕ.

~~TRAITEMENT QUANTIQUE DE L'INFORMATION II. SOLUTION SERIE 4~~

Solution **EXERCICE ~~1~~5:**

(a) Rappels $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$. On utilise aussi les définitions $\sigma^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\sigma^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On trouve donc

$$H = \hbar J \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour l'Hamiltonien de Heisenberg. Remarque : cette matrice peut s'écrire

$$H = \hbar J \begin{pmatrix} \sigma_z & 2\sigma^- \\ \sigma^+ & -\sigma_z \end{pmatrix}$$

(b)

$$\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^- \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et

$$\sigma_1^- \otimes \sigma_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sigma^+ & 0 \end{pmatrix}.$$

Donc on trouve aussi,

$$\hbar J \begin{pmatrix} \sigma_z & 2\sigma^- \\ 2\sigma^+ & -\sigma_z \end{pmatrix} = \hbar J \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + 2\hbar J \left(\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^-\right).$$

(c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0.$$

(d) Etat singulet :

$$\begin{aligned} \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) &= \sigma_1^z|\uparrow\rangle \otimes \sigma_2^z|\downarrow\rangle - \sigma_z^1|\downarrow\rangle \otimes \sigma_2^z|\uparrow\rangle \\ &= -|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle \\ &= -(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_1^+ \otimes \sigma_2^-(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) &= \sigma_1^+|\uparrow\rangle \otimes \sigma_2^-|\downarrow\rangle - \sigma_z^+|\downarrow\rangle \otimes \sigma_2^-|\uparrow\rangle \\ &= 0 - |\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle \\ &= -|\uparrow\downarrow\rangle. \end{aligned}$$

De même,

$$\sigma_1^- \otimes \sigma_2^+(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle) = +|\downarrow\uparrow\rangle.$$

On en déduit finalement

$$H|\psi_{0;0}\rangle = \hbar J|\psi_{0;0}\rangle - 2\hbar J|\psi_{0;0}\rangle = -3\hbar J|\psi_{0;0}\rangle.$$

Le singulet est un état propre de l'Hamiltonien d'énergie $-3\hbar J$.

Etat triplet :
On trouve de facon similaire (faire le calcul !).

$$\begin{aligned} H|\psi_{1;1}\rangle &= \hbar J|\psi_{11}\rangle \\ H|\psi_{1;0}\rangle &= \hbar J|\psi_{10}\rangle \\ H|\psi_{1;-1}\rangle &= \hbar J|\psi_{01}\rangle \end{aligned}$$

Ce sont 3 états propres de même énergie $\hbar J$.

L'etat fondamental, de plus basse énergie est $-3\hbar J$ (singulet) et il y a 3 états excités en énergie $\hbar J$ (singulet). La différence d'énergie est $4\hbar J$.

(e) En présence d'un champ extérieur $\vec{B} = (0, 0, B)$.

$$H = -\hbar\omega_1\sigma_1^z \otimes \mathbb{I} - \hbar\omega_2\mathbb{I} \otimes \sigma_2^z + \hbar J\vec{\sigma}_1.\vec{\sigma}_2.$$

et

$$\sigma_1^z \otimes \mathbb{I} = \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{I} \otimes \sigma_2^z = \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donc la matrice Hamiltonienne 4×4 est :

$$\begin{pmatrix} -\omega_1 - \omega_2 + J & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\omega_1 + \omega_2 - J & 2J & 0 \\ 0 & 2J & \omega_1 - \omega_2 - J & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 + \omega_2 + J \end{pmatrix}.$$

Valeurs et vecteurs propres pour $\omega_1 = \omega_2$.

$$H|\psi_{0;0}\rangle = -3\hbar J.$$
$$H|\psi_{1;1}\rangle = -\hbar(\omega_1 + \omega_2) + \hbar J.$$
$$H|\psi_{1;0}\rangle = \hbar J.$$
$$H|\psi_{1;-1}\rangle = \hbar(\omega_1 + \omega_2) + \hbar J.$$

Commentaire :

Sitót que $B \neq 0$ la dégénérécence de l'état triplet est "levé"e. En physique cela s'appelle l'effet Zeeman. De plus l'état singulet $|\psi_{0;0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$ est l'état de plus basse énergie tont que $\omega_0 < 2J$. Pour $\omega_0 > 2J$ c'est l'état $|\psi_{1;1}\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$ qui devient l'état de plus basse énergie.

Si on fait un schéma (faites le !)des niveaux dénergie en fonction de B (l'intensité du champ magnétique) on voit que pour une certaine intensité de B il y a un croisement entre le singulet et un des triplets. On appelle cela un croisement de niveaux. Les propriétés qualitatives d'un systeme peuvent changer lorsqu'il y a croisement de niveaux. Par exemple ici la nature même de létat fondamental (c.a.d de plus basse énergie) change. Son spin total passe de $0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$ à $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$.

Ceci est conforme à l' intuition suivante : si B est trés petit c'est l'interaction de Heisenberg qui domine et les spins ont trendance à être antiparallèles (spin total 0), par contre si B est grand les spins veulent s'aligner (spin total 1) avec ce dernier.